30A03000 Talousmatematiikan perusteet
Mallivastaukset

Date of exam: 9.9.2021 **Solved by**: mathwiz.ai

Disclaimer:
These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.

2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.

3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: mathwizcontact@gmail.com.

Problem 1

Lainan määrä on 20000 euroa, vuosikorko 3% ja laina maksetaan viidessä vuodessa annuiteettiperiaatteella neljännesvuosittain.
(a) Mikä on maksuerän suuruus?
(b) Paljonko korkoja maksetaan yhteensä koko laina-aikana?
(c) Paljonko korkoja maksett aisiin yhteensä, jos annuiteetin sijaan lainapääoman lyhennys olisi samansuuruinen jokaisena neljännes vuotena? (Huomautus: Muista per ustella vastauksesi!)

Problem 1 solution

(a) Maksuerän suuruus lasketaan annuiteettikaavalla:

$$A = P\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

missä A on maksuerän suuruus, P on lainan määrä, r on korko per maksukausi ja n on maksukausien määrä. Tässä tapauksessa $P = 20000$ euroa, $r = 0.03/4 = 0.0075$ (koska maksut tehdään neljännesvuosittain) ja $n = 5 \times 4 = 20$ (koska laina-aika on viisi vuotta ja maksut tehdään neljännesvuosittain). Sijoittamalla nämä arvot kaavaan saadaan

$$A = 20000\frac{0.0075(1+0.0075)^{20}}{(1+0.0075)^{20} - 1} \approx 1080.61 \text{ euroa.}$$

(b) Koko laina-ajan aikana maksettavat korot saadaan vähentämällä lainan määrä kokonaislainan määrästä, joka on maksuerän suuruus kerrottuna maksukausien määrällä:

$$\text{Korot} = A \times n - P = 1012.22 \times 20 - 20000 \approx 1612.25 \text{ euroa.}$$

(c) Jos lainapääoman lyhennys olisi samansuuruinen jokaisena neljännesvuotena, korkoja maksettaisiin vähemmän. Tässä tapauksessa jokaisen maksuerän suuruus olisi $P/n = 20000/20 = 1000$ euroa. Korko laskettaisiin jokaiselle neljännesvuodelle erikseen, ja se olisi aina 0.75 % jäljellä olevasta lainapääomasta. Koska lainapääoma pienenee jokaisen maksuerän jälkeen, myös maksettavat korot pienenevät ajan myötä. Tarkka summa riippuu maksuaikataulusta, mutta se olisi varmasti alle 1612.25 euroa, koska sama summa lyhennetään lainapääomasta jokaisena neljännesvuotena.

Problem 2

Auton arvo uutena on 80000 euroa ja se vähenee 10% vuodessa.
(a) Määrää funktio $f : \mathbb{R}^+ \to (0, 80000], a = f(t)$, joka kuvaa auton arvoa t vuoden kuluttua.
(b) Hahmottele funktion f kuvaaj a j a määritä sen perusteella raj a- arvo $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
(c) Määrää käänteisfunktio $f^{-1} : (0, 80000] \to \mathbb{R}^+, t = f^{-1}(a)$. Mitä se kuvaa? (Huomaut us: Muista per ustella vast auksesi!)
(d) Kuinka pitkän ajan kuluttua auton arvo on 10000 euroa?

Problem 2 solution

(a) Auton arvo vähenee 10 % joka vuosi. Tämä voidaan mallintaa funktiolla $f(t) = 80000 \cdot (0.9)^t$, missä t on vuosien määrä siitä, kun auto oli uusi.

(b) Raja-arvo, kun t lähestyy ääretöntä $f(t)$ on 0. Tämä johtuu siitä, että kun t kasvaa, $(0.9)^t$ lähestyy 0, ja siten auton arvo lähestyy 0.

(c) Käänteisfunktio $f^{-1}(a)$ voidaan löytää ratkaisemalla yhtälö $a = 80000 \cdot (0.9)^t$ t:n suhteen. Tämä antaa $t = \frac{\log(a/80000)}{\log(0.9)}$. Tämä funktio antaa vuosien määrän siitä, kun auto oli uusi, annetulle auton arvolle.

(d) Löytääksemme, milloin auton arvo on 10000 euroa, voimme asettaa $a = 10000$ käänteisfunktiossa ja ratkaista t:n. Tämä antaa $t = \frac{\log(10000/80000)}{\log(0.9)} \approx$ 19.74 vuotta.

Problem 3

Määritä (osittais)derivaatat:
(a) $\frac{\partial f}{\partial x}$, kun $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$
(b) $\frac{\partial f}{\partial y}$, kun $f(x, y) = xy^2 + x \ln y + 2x$,
(c) $\frac{\partial g}{\partial x_2}$, kun $g(x_1, x_2) = x_1^{x_2+4} + \ln \sqrt{x_2 + 1}$.
Huomautus: muista esitää välivaiheet ja perustella käyttämäsi derivointisäännöt.

Problem 3 solution

(a) The derivative of $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$ with respect to x can be found using the chain rule and the derivative of the exponential function.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2^{\sqrt{x^2+1}} \ln(2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x \cdot 2^{\sqrt{x^2+1}} \ln(2)}{\sqrt{x^2+1}}$$

(b) The derivative of $f(x, y) = xy^2 + x \ln y + 2x$ with respect to y can be found using the product rule and the derivative of the natural logarithm.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 2y + x \cdot \frac{1}{y} = 2xy + \frac{x}{y}$$

(c) The derivative of $g(x_1, x_2) = x_1^{x_2+4} + \ln \sqrt{x_2 + 1}$ with respect to x_2 can be found using the chain rule, the derivative of the natural logarithm, and the derivative of a function raised to a variable power.

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = x_1^{x_2+4} \ln x_1 + \frac{1}{2\sqrt{x_2+1}} = \ln x_1 \cdot x_1^{x_2+4} + \frac{1}{2x_2+2}$$

Problem 4

Paperiteollisuusyrityksen tuotannon arvoa (M€) kuvaa funktio

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1^{0.3} x_2^{0.7},$$
1

missä x_1 on työpanos (M€) ja x_2 on pääoma (M€). Oletetaan, että rahaa on käytössä 50M.
(a) Miten raha pitää jakaa työpanokselle ja pääomalle, jotta tuotannon arvo maksimoituu. Muista tutkia ääriarvon laatu. (Huomaut us: tarkoitus on käyttää L agrangen menetelmää eikä ratkaist a tehtävää esim. suor aan solverin avulla)
(b) Mikä on tuotannon maksimiarvo?
(c) Mikä on budjettirajoitteen varjohinta? Miten tulkitset varjohintaa?

Problem 4 solution

(a) Tuotannon arvon maksimoimiseksi meidän on löydettävä x_1 ja x_2 arvot, jotka maksimoivat funktion $f(x_1, x_2) = 2x_1^{0.3}x_2^{0.7}$ rajoituksella $x_1 + x_2 = 50$. Tämä voidaan tehdä käyttämällä Lagrangen menetelmää. Asetetaan Lagrangen funktio $L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^{0.3}x_2^{0.7} - \lambda(x_1 + x_2 - 50)$ ja lasketaan sen osittaisderivaatat x_1, x_2 ja λ suhteen ja asetetaan ne nollaksi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.6x_1^{-0.7}x_2^{0.7} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1.4x_1^{0.3}x_2^{-0.3} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 50 = 0$$

Ratkaisemalla nämä yhtälöt saadaan $x_1 = 15, x_2 = 35$, joka on maksimipiste.

(b) Tuotannon maksimiarvo saadaan sijoittamalla $x_1 = 15, x_2 = 35$ funktioon f, jolloin saadaan $f(15, 35) = 2 \cdot 15^{0.3} \cdot 35^{0.7} = 54.29$.

(c) Budjettirajoitteen varjohinta saadaan Lagrangen kertoimen λ arvosta, joka on $\lambda = 0.6 \cdot 15^{-0.7} \cdot 35^{0.7} = 1.086$. Varjohinta kertoo, kuinka paljon tuotannon arvo kasvaa, jos budjettirajoitetta lisätään yhdellä yksiköllä. Tässä tapauksessa, jos yritys voisi käyttää yhden euron enemmän, sen tuotannon arvo kasvaisi 1.086 eurolla.

Problem 5

Tarkastellaan funktiota

$$f(x, y) = xy + x^{-1} + \ln y.$$

Oletet aan lähtötilanteeksi $x = 2$ ja $y = 1$.

(a) Arvioi gradientin avulla f :n muutos, kun x :ää kasvatetaan 0.1 ja y :tä pienennetään 0.1 . Mikä on $f : n$ todellinen muutos?
(b) Määritä suunta (vektori), johon funktio kasvaa nopeiten. Määritä myös suunta, johon funktio vähenee nopeiten. (Huomaut us: suuntavektorin pituudella ei ole väliä, aino ast aan suunnalla)
(c) Mihin suuntaan funktion arvot eivät muutu? (Huomaut us: suunt avektorin pituudella ei ole väliä, ainoastaan suunnalla)

Problem 5 solution

(a) Funktion $f(x, y) = xy + x^{-1} + \ln y$ gradientti on vektori, jonka komponentit ovat funktion osittaisderivaatat x ja y suhteen. Lasketaan nämä osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - x^{-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{1}{y}$$

Sijoitetaan $x = 2$ ja $y = 1$ näihin lausekkeisiin saadaksemme gradientin arvon lähtötilanteessa:

$$\nabla f(2, 1) = \left(1 - \frac{1}{4}, 2 + 1\right) = \left(\frac{3}{4}, 3\right)$$

Gradientin avulla arvioitu muutos, kun x kasvaa 0.1 ja y pienenee 0.1, on gradientin ja muutosvektorin pistetulo:

$$\Delta f \approx \nabla f(2, 1) \cdot \Delta \mathbf{x} = \left(\frac{3}{4}, 3\right) \cdot (0.1, -0.1) = 0.075 - 0.3 = -0.225$$

Todellinen muutos saadaan sijoittamalla $x = 2+0.1 = 2.1$ ja $y = 1-0.1 = 0.9$ funktioon f:

$$\Delta f = f(2.1, 0.9) - f(2, 1) = 2.1 \cdot 0.9 + \frac{1}{2.1} + \ln 0.9 - 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = -0.239$$

(b) Funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan, eli suuntaan $(\frac{3}{4}, 3)$. Funktio vähenee nopeimmin vastakkaiseen suuntaan, eli suuntaan $(-\frac{3}{4}, -3)$.

(c) Funktion arvot eivät muutu suunnassa, joka on kohtisuorassa gradientin suuntaan. Tämä suunta voidaan laskea ottamalla gradientin suunnan vektorin koordinaattien vaihto ja toisen merkin vaihto, eli suunta on $(-3, \frac{3}{4})$ tai $(3, -\frac{3}{4})$.