



# Aalto-yliopisto

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu  
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Tentti 30.8.2023 klo 9.00–12.00.

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1	Alestalo
MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1	Alestalo
MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1	Malinen
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1	Malinen

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä selkeällä käsialalla **kaikki** otsaketiedot kuten nimesi ja opiskelijanumerosi kaikkiin vastauspapereihin.

**Uusintatentti:** Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

**Yleinen tentti:** Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen voi yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + voimassa olevat laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Määritä kaikki reaaliluvut  $x \in \mathbb{R}$ , joilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

suppenee. Tutki myös mahdolliset suppenemisvälin päätepisteet.

2. a) Laske raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^2}{(x - 1)^2}$$

esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla. (3p)

b) Muodosta funktion  $f(x) = e^{2x}$  toisen asteen Maclaurin-polynomi (eli Taylor-polynomi kehityskeskusteen  $x_0 = 0$  suhteen). Miten a-kohdan ensimmäinen raja-arvo liittyy tähän polynomiin? (3p)

**KÄÄNNÄ!**

3. a) Johda funktion  $f(x) = \tan x$  käänteisfunktion  $f^{-1}(x) = \arctan x$  derivaatan lauseke. (4p)

b) Mitkä ovat a-kohdan funktioiden  $f$  ja  $f^{-1}$  määrittelyjoukot? (2p)

4. Laske integraalit

$$\int_1^e x \ln x \, dx \quad \text{ja} \quad \int_1^{\pi^3} \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \, dx.$$

**Vihje:** Ensimmäinen integroimalla osittain, mutta miten? Jälkimmäiseen voi sijoittaa  $x = u^3$ , ja siitä eteenpäin tilanteen mukaan. (3p + 3p)

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö  $y' = 6xy^3$  alkuehdolla

a)  $y(0) = 1$ ; (3p)

b)  $y(0) = 0$ . (3p)

6. Määritä differentiaaliyhtälön  $y'' + y' - 6y = e^{2x}$  yleinen ratkaisu  $y = y(x)$ . (6p)

**Lisätieto:** Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

**Eräitä kaavoja:**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

**KÄÄNNÄ!**