ELEC-A3110 Mekaniikka, syksy 23 **Välikoe 1, malliratkaisut**

opettaja: Matti Raasakka

Tehtävä 1

Yhdistä suureet oikeisiin yksiköihin. (1p/suure)

voima	J
energia	Js
liikemäärä	J/s
työ	N
teho	Nm
jousivakio	N/m

Malliratkaisu:

voima - N
energia - J (tai Nm)
liikemäärä - ei oikeita yksiköitä
työ - Nm (tai J)
teho - J/s
jousivakio - N/m

Tehtävä 2

Pesäpalloilija heittää pallon (massa m) lähtökorkeudelta h ajanhetkellä $t = 0$. Pallon alkunopeuden suuruus on v, ja alkunopeuden suunta muodostaa kulman α vaakatasoon nähden. Valitaan x-akseli niin, että pallon alkunopeuden vaakasuuntainen komponentti osoittaa positiivisen x-akselin suuntaan. Palloon vaikuttaa lennon aikana putoamiskiihtyvyyden g lisäksi voimistuvasta vastatuulesta johtuva ajasta riippuva voima $F = \beta t$ negatiivisen x-akselin suuntaan, missä β on vakio. Ilmanvastus voidaan jättää huomiotta voimaa F lukuunottamatta.

a) Kuinka korkealla pallo käy ylimmillään? (3p)
b) Kuinka kauas pallo lentää pesäpalloilijasta vaakasuunnassa mitattuna? (3p)

Malliratkaisu:

a) Valitaan positiivinen y-akseli ylöspäin. y-suunnassa palloon vaikuttaa pelkästään putoamiskiihtyvyys, joten pallon y-koordinaatille saadaan aikariippuvuus $y(t) = h + v_y t - \frac{1}{2}gt^2$, missä $v_y = v \sin\alpha$ on pallon alkunopeuden y-komponentti. (1p) Lentoradan lakipisteessä pallon y-suuntainen nopeus $v_y(t) = v_y - gt$ on nolla, mistä saadaan ratkaistua aika t_1, jolloin pallo saavuttaa lakipisteen: $t_1 = \frac{v_y}{g}$. (1p) Sijoittamalla y-koordinaatin lausekkeeseen, saadaan lakipisteen korkeudeksi

$$y(t_*) = h + v_y t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = h + v_y\left(\frac{v_y}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_y}{g}\right)^2 = h + \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g}\,. \quad \text{(1p)}$$

b) x-suunnassa palloon vaikuttaa aikariippuvainen voima $F(t) = -\beta t$, joilloin kiihtyvyyskin $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{\beta}{m}t$ muuttuu ajassa, ja täytyy selvittää paikan muutos integroimalla kiihtyvyyttä. Pallon alkunopeus x-suunnassa on $v_x = v\cos\alpha$. Nopeudeksi x-suunnassa saadaan

$$v_x(t) = v_x + \int_0^t a(t')\mathrm{d}t' = v_x - \frac{1}{2}\frac{\beta}{m}t^2\,. \quad \text{(0,5p)}$$

Kun valitaan pallon lähtöpiste kohdaksi $x = 0$, niin paikalle x-suunnassa saadaan

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\mathrm{d}t = v_x t - \frac{1}{6}\frac{\beta}{m}t^3\,. \quad \text{(0,5p)}$$

Aika, joka pallolla kuluu osua maahan voidaan ratkaista y-koordinaatin ehdosta $y(t_2) = 0$. Saadaan

$$\begin{aligned} y(t_2) = h + v_y t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} g t_2^2 - v_y t_2 - h = 0 \\ \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot (-h)}}{g} = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g} \end{aligned}$$

Näistä plus-merkin omaava ratkaisu on positiivinen, joten se on haluttu aika $t_2 = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}$. (1p)

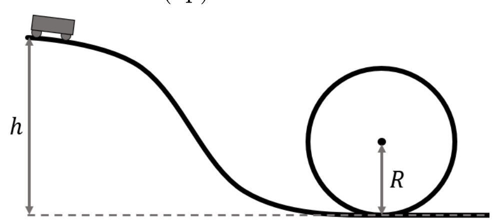
Sijoitetaan tämä x-koordinaatin yhtälöön, ja pallon etäisyydeksi hetkellä, jolloin se osuu maahan, saadaan

$$x(t_2) = v_x \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g} - \frac{1}{6} \frac{\beta}{m} \left(\frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g} \right)^3 ,$$

missä $v_x = v \cos \alpha$ ja $v_y = v \sin \alpha$. (1p)

Tehtävä 3

Tarkastellaan alla olevan kuvan kaltaista vuoristorataa. Vaunu lähtee liikkeelle levosta korkeudelta h, ja laskee mäen alas. Tämän jälkeen vaunu kulkee ympyränmuotoiseen silmukkaan, jonka säde on R. Vaunuun vaikuttaa putoamiskiihtyvyys g. Oletetaan, että, vaunu liikkuu radalla kitkatta. Selvitä pienin korkeus h, jolla vaunu ei putoa silmukasta. (6p)



Malliratkaisu:

Silmukan ylimmässä kohdassa vaunuun vaikuttaa painovoima ja mahdollinen radan tukivoima alaspäin. Rajatapauksessa, kun vaunu juuri ja juuri pysyy radassa kiinni, radan tukivoimaa ei tarvita vaunun radalla pysymiseksi. Tällöin painovoima yksistään pitää huolen, että vaunu seuraa ympyrärataa, ja siten vaunun radiaalinen kiihtyvyys on $a_{rad} = g$ radan ylimmässä kohdassa. (1p) Koska vaunu seuraa ympyrärataa, niin sen vauhti liittyy radiaaliseen kiihtyvyyteen kaavan $a_{rad} = \frac{v^2}{R}$ kautta. (1p) Yhtälöstä $g = \frac{v^2}{R}$ saadaan ratkaistua vaunun tarvittavaksi vauhdiksi vähintään $v_{min} = \sqrt{gR}$. (1p)

Vaunu lähtee levosta liikkeelle, ja sillä on aluksi pelkästään painovoiman potentiaalienergiaa $U_g = mgh$. (1p) Vaunun liikkuessa osa sen painovoiman potentiaalienergiasta muuttuu liike-energiaksi. Silmukan ylimmässä kohdassa vaunulla on sekä liike-energiaa että potentiaalienergiaa:

$$E = K + U_g = \frac{1}{2} m v^2 + mg \cdot 2R \,. \quad \text{(1p)}$$

Koska kitkavoimat voidaan jättää huomiotta, niin systeemin mekaaninen energia säilyy. Saadaan siis energian säilymisestä yhtälö

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + 2mgR \,.$$

Silmukan pienimmälle mahdolliselle arvolle saadaan siis ratkaistua

$$h_{min} = \frac{1}{2} \frac{v_{min}^2}{g} + 2R = \frac{5}{2} R \,. \quad \text{(1p)}$$