Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Malinen)
MS-A0107 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Alestalo)

Kurssitentti ja yleinen tentti 18.10.2023 klo 16.30–19.30.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille I/2023 osallistunut voi halutessaan laskea myös kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. a) Laske sarjan
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^{k+1}}$$
summa. (2 p.)
b) Potenssisarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k \cdot 4^k}$$
suppenee eräällä välillä $]-R, R[$. Mikä on suurin mahdollinen $R > 0$? (4 p.)
Vihje: Suhdetesti.

2. a) Määritä funktion $f(x) = xe^{2x}$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi.
b) Laske raja-arvo
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)\cos(4x)}{\sin(x)\cos(2x)}$$
esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla.

3. Laske määrätyt integraalit
$$\int_0^1 x(1+x^2)^{23}\,dx \quad \text{ja} \quad \int_0^{2\pi} x\cos x\,dx.$$

4. a) Laske määrätty integraali
$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$$
sijoittamalla aluksi $u = \sqrt{x}$.
b) Suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}?$$

5. Valo etenee läpinäkyvässä väliaineessa, jolloin sen intensiteetti $y = y(x)$ pienenee differentiaaliyhtälön $y'(x) = -ky(x)$ mukaisesti. Tässä k on vakio ja x on valon kulkema matka väliaineessa.

   Eräässä nesteessä valon intensiteetti pienenee metrin matkalla arvosta $y(0)$ arvoon $y(1) = y(0)/3$.
   a) Muodosta differentiaaliyhtälön ratkaisu ja päättele sen avulla vakion k tarkka arvo.
   b) Kuinka pitkällä matkalla valon intensiteetti puolittuu?

   Tarpeettomia (?) lisätietoja: Ilmiön nimi on absorptio ja yleensä intensiteettiä merkitään $I = I(x)$. Vakion k nimi on lineaarinen absorptiokerroin. Tehtävän b-kohdassa laskettu etäisyys on nimeltään valon "keskimääräinen vapaa matka" (vrt. puoliintumisaika).

6. Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

   ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi & 2\pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 & 1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia II-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**