

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu  
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Malinen)

MS-A0107 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Alestalo)

Kurssitentti ja yleinen tentti 18.10.2023 klo 16.30–19.30.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen kurssille I/2023 osallistunut voi halutessaan laskea myös kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koe-tehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. a) Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^{k+1}}$$

summa. (2 p.)

b) Potenssisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k \cdot 4^k}$$

suppenee eräällä välillä ] - R, R[. Mikä on suurin mahdollinen R > 0? (4 p.)

Vihje: Suhdetesti.

2. a) Määritä funktion  $f(x) = xe^{2x}$  kolmannen asteen Maclaurin-polynomi.

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cos(4x)}{\sin(x) \cos(2x)}$$

esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla.

3. Laske määrättyt integraalit

$$\int_0^1 x(1+x^2)^{23} dx \quad \text{ja} \quad \int_0^{2\pi} x \cos x dx.$$

4. a) Laske määrätty integraali

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

sijoittamalla aluksi  $u = \sqrt{x}$ .

b) Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}?$$

5. Valo etenee läpinäkyvässä väliaineessa, jolloin sen intensiteetti  $y = y(x)$  pienenee differentiaaliyhtälön  $y'(x) = -ky(x)$  mukaisesti. Tässä  $k$  on vakio ja  $x$  on valon kulkema matka väliaineessa.

Eräässä nesteessä valon intensiteetti pienenee metrin matkalla arvosta  $y(0)$  arvoon  $y(1) = y(0)/3$ .

a) Muodosta differentiaaliyhtälön ratkaisu ja päättele sen avulla vakion  $k$  tarkka arvo.

b) Kuinka pitkällä matkalla valon intensiteetti puolittuu?

Tarpeettomia (?) lisätietoja: Ilmiön nimi on absorptio ja yleensä intensiteettiä merkitään  $I = I(x)$ . Vakion  $k$  nimi on lineaarinen absorptiokerroin. Tehtävän b-kohdassa laskettu etäisyys on nimeltään valon "keskimääräinen vapaa matka" (vrt. puoliintumisaika).

6. Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

ratkaisu alkuehdoilla  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 10$ .

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$\alpha$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1	1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	0

Eräitä kaavoja:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssintentin voi uusia II-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.