ELEC-A3110 Mekaniikka, syksy 23 **Välikoe 2, malliratkaisut**
opettaja: Matti Raasakka

Tehtävä 1

Valitse oikeat väitteet, ja kirjoita niitä vastaavat kirjaimet konseptipaperille. (Oikeasta väitteestä +1p, väärästä valinnasta −1p. Kokonaispisteet kuitenkin minimissään 0.)

A) Leveämmän astian pohjalla on suurempi paine.
B) Pakonopeus on se nopeus, jolla kappale voi nousta planeetan pinnalta kiertoradalle.
C) Kun kappaleeseen kohdistetaan kaksi pyörähdystä peräkkäin eri akselien suhteen, niin pyörähdysten järjestyksellä on merkitystä lopputuloksen kannalta.
D) Kriittisesti vaimennetulla harmonisella värähtelijällä on suurin mahdollinen värähtelyn amplitudi.
E) Painovoima hallitsee maailmankaikkeuden rakennetta suurilla mittakaavoilla.
F) Ekvipartitioperiaatteen mukaan termisessä tasapainossa energia jakaantuu tasaisesti kaikille systeemin vapausasteille.
G) Kappaleen kulmaliikemäärä säilyy, kun kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima häviää.
H) Superpositiossa olevat aallot etenevät toisistaan riippumatta.
I) Kappaleen hitausmomentti on riippumaton pyörähdysakselista.
J) Nesteeseen upotettuun kappaleeseen kohdistuva noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän nestetilavuuden paino.
K) Aineen ominaislämpökapasiteetti ei riipu lämpötilasta.
L) Isobaarisessa termodynaamisessa prosessissa kaasun paine pysyy samana.

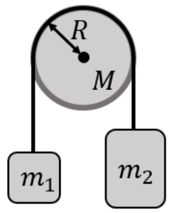
Malliratkaisu:

C, E, F, H, J, L (+1p oikeasta vastauksesta, −1p väärästä, min. 0p)

Selityksiä:
A) Paine riippuu vain syvyydestä, ei astian muodosta.
B) Pakonopeudella tarkoitetaan lähtönopeutta planeetan pinnalta, jolla kappale voi liikkua mielivaltaisen kauas planeetasta pois planeetan painovoiman vaikutuspiiristä, eikä ainoastaan kiertoradalle.
C) Totta.
D) Kriittisesti vaimennettu värähtelijä ei värähtele laisinkaan.
E) Totta.
F) Totta.
G) Kulmaliikemäärä säilyy, kun kokonaisvoiman momentti häviää.
H) Totta.
I) Hitausmomentti riippuu akselista.
J) Totta (ns. Arkhimedeen laki).
K) Ominaislämpökapasiteetti riippuu lämpötilasta sen mukaan, mitkä vapausasteet voivat säilöä energiaa missäkin lämpötilassa.
L) Totta.

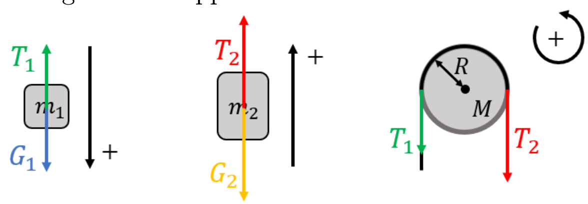
Tehtävä 2

Tarkastellaan alla olevan kaltaista systeemiä, joka koostuu väkipyörästä (massa M, säde R, hitausmomentti $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$) ja kahdesta narulla toisiinsa kiinnitetystä painosta (massat m_1 ja m_2). Painoihin vaikuttaa putoamiskiihtyvyys g alaspäin. Väkipyörä pyörii kitkatta keskipisteensä läpi kulkevan akselin ympäri. Narun voidaan olettaa olevan massaton ja venymätön. Naru kulkee väkipyörän ympäri, eikä liu'u väkipyörää vasten. Ratkaise väkipyörän kulmakiihtyvyys, kun systeemi päästetään levosta liikkeelle. (6p)



Malliratkaisu:

Voimadiagrammit kappaleille:



Kappaleisiin vaikuttaa seuraavat voimat: Painoon 1 vaikuttaa sen oma paino $G_1 = m_1 g$ ja narun tukivoima T_1. Painoon 2 vaikuttaa sen oma paino $G_2 = m_2 g$ ja narun tukivoima T_2. Väkipyörään kohdistuvat voimat ovat narun kohdistamat voimat T_1 ja T_2. Nämä ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset painoihin kohdistuviin narun tukivoimiin nähden, kun oletetaan narun olevan venymätön, jolloin naru välittää voimat häviöttä päidensä välillä. Voimat T_1 ja T_2 kohdistavat väkipyörään voiman momentit $T_1 R$ ja $T_2 R$. (1p)

Valitaan kappaleille positiivinen liikesuunta siihen suuntaan, johon ne liikkuvat, kun väkipyörä pyörii vastapäivään. Laatikkojen kiihtyvyydet ovat samat, kun oletetaan, ettei naru veny. Merkitään tätä kiihtyvyyttä kirjaimella a. Koska naru liikkuu väkipyörän yli lipsumatta, niin väkipyörän kulmakiihtyvyydelle α pätee $\alpha = \frac{a}{R}$. (1p) Saadaan muodostettua kappaleille seuraavat liikeyhtälöt:

$$\begin{aligned} \text{Paino 1:} \quad & m_1 a = m_1 g - T_1 \qquad \text{(1p)} \\ \text{Paino 2:} \quad & m_2 a = T_2 - m_2 g \qquad \text{(1p)} \\ \text{Väkipyörä:} \quad & I\alpha = T_1 R - T_2 R \qquad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan T_1 painon 1 liikeyhtälöstä: $T_1 = m_1(g - a)$. Ratkaistaan T_2 painon 2 liikeyhtälöstä: $T_2 = m_2(g + a)$. Sijoitetaan nämä väkipyörän liikeyhtälöön, ja sijoitetaan myös $a = R\alpha$:

$$\begin{aligned} I\alpha &= Rm_1(g - a) - Rm_2(g + a) \\ &= Rm_1(g - R\alpha) - Rm_2(g + R\alpha) \\ &= Rm_1 g - R^2 m_1 \alpha - Rm_2 g - R^2 m_2 \alpha \\ &= -R^2(m_1 + m_2)\alpha + R(m_1 - m_2)g\,. \end{aligned}$$

Siirretään α:a sisältävät termit vasemmalle, ja sijoitetaan $I = \frac{1}{2}MR^2$.

$$\left[\frac{1}{2}MR^2 + R^2(m_1 + m_2)\right]\alpha = R(m_1 - m_2)g$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \frac{m_1 - m_2}{M/2 + m_1 + m_2}\,\frac{g}{R}\,. \qquad \text{(1p)}$$

Tehtävä 3

Sylinteri, jossa on kitkattomasti liikuteltava mäntä, sisältää heliumkaasua. Aluksi kaasun paine on p_0, lämpötila T_0 ja tilavuus V_0. Sitten kaasu käy läpi kaksi termodynaamista prosessia tässä järjestyksessä:

1. Kaasua lämmitetään, mutta männän annetaan liikkua niin, että kaasun lämpötila pysyy vakiona. Tätä jatketaan, kunnes kaasun paine saavuttaa arvon p_1.

2. Kaasua puristetaan vakiopaineessa p_1, kunnes se saavuttaa alkuperäisen tilavuutensa V_0.

Voit käsitellä kaasua ideaalikaasuna.

a) Selvitä kaasun tilavuus ensimmäisen prosessin jälkeen, sekä kaasun lämpötila ja paine toisen prosessin jälkeen. (3p)
b) Selvitä kaasun tekemä kokonaistyö prosessien aikana. (3p)

Malliratkaisu:

a) Sovelletaan ideaalikaasun tilanyhtälöä $pV = nRT$. Ainemäärä n pysyy koko ajan vakiona. Merkitään tilanmuuttujien arvoja alussa p_0,V_0,T_0. Ainemäärälle saadaan $n = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$ Tilavuudelle ensimmäisen prosessin jälkeen saadaan

$$V_1 = \frac{nRT_0}{p_1} = \frac{p_0}{p_1} V_0 \,. \quad \text{(1p)}$$

Paine toisen prosessin jälkeen on tehtävänannon mukaan sama kuin ensimmäisen prosessin jälkeen eli p_1. (1p) Lämpötila toisen prosessin jälkeen

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{p_2 V_2}{p_0 V_0} T_0 = \frac{p_1}{p_0} T_0 \,,$$

missä sijoitettiin $p_2 = p_1$ ja $V_2 = V_0$. (1p)

b) Kaasun tekemä työ ensimmäisessä prosessissa on

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p \; \mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_1} \frac{nRT_0}{V} \mathrm{d}V = nRT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_0 V_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \,. \quad \text{(2p)}$$

Toisessa prosessissa kaasu tekee työn

$$W = \int_{V_1}^{V_0} p_1 \; \mathrm{d}V = p_1 (V_0 - V_1) \,. \quad \text{(1p)}$$