MS-C1420 Fourier-analys (Aalto-universitetet) Turunen / Puska
16.10.2023, 13:00–16:00

Poäng också för goda försök! **Räknare och litteratur är förbjudna.**

---

1. (a) Låt $f = \widehat{q}$, där $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ antas vara "tillräckligt bekväm". Visa att $\widehat{f}(\nu) = q(-\nu)$ för alla $\nu \in \mathbb{R}$.

   (b) Låt $r(t) := \mathrm{e}^{-2\pi|t|}$, där $t \in \mathbb{R}$. Visa att $\widehat{r}(\nu) = \dfrac{1/\pi}{1+\nu^2}$.

   (c) Låt $s(t) := \mathrm{e}^{-2\pi|t|} + \dfrac{1/\pi}{1+t^2}$, där $t \in \mathbb{R}$. Visa att $\widehat{s} = s$.

2. (a) Vi studerar en funktion q , där $q(t) = \sin(2\pi t)^3$. Visa att $q(t-1) = q(t)$. Med motivering, beräkna Fourier-koefficienten $\widehat{q}(0)$ av en 1-periodisk analog signal $q : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   (Gott råd: tänk på de positiva och negativa värden för integranden.)

   (b) Låt $r(t) = (1 + \sin(2\pi t))/(2 + \cos(2\pi t))$, där $t \in \mathbb{R}$. Beräkna summan $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{r}(\nu)$ av Fourierkoefficienterna för en 1-periodisk analog signal r.

   (Gott råd: Beräkna inte Fourierkoefficienterna direkt, utan tänk på hur Fourierserier beter sig generellt!)

   (c) Låt $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Visa att $\left| \int_0^1 s(t)\,\mathrm{d}t \right|^2 \le \int_0^1 |s(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

   (Gott råd: Bevaranden av energin kan vara till hjälp. Också andra lösningsmetoder finns, till exempel med hjälp av Cauchy–Schwarz olikhet eller Hölders olikhet.)

3. Låt $r, s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara signaler, för vilka $\sum_{t \in \mathbb{Z}} |r(t)| < \infty$ och $\sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)| < \infty$.

   (a) Vad är formeln för Fouriertransformen av signalen s?
   Och vad är då formeln för den inversa Fouriertransformen?
   Och vad är formeln för faltningen (konvolutionen) $r * s$ av signalerna r, s?

   (b) Visa att här bevarar Fouriertransformen skalärprodukten, det vill säga $\langle r, s \rangle = \langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle$, där $\widehat{r}, \widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ är respektive tidsdiskret Fouriertransform (DTFT).

4. (a) Hur definierar man den diskreta Fouriertransformen av en 12-periodisk digital signal? Vad är då formeln för den inversa Fouriertransformen?

   (b) Hur definierar man *energin* av en 12-periodisk digital signal?
   Hur definierar man *faltningen* $r * s$ av 12-periodiska digitala signaler?

   (c) Låt $s(t) := \sin(\pi t/6)$, när $t \in \mathbb{Z}$.
   Beräkna den diskreta Fouriertransformen av signalen $s : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
   (Kom ihåg att $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$).