

## PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka, tentti 5.12.2023

Jos teet **kurssitenttin**, jolloin arvosana määräytyy tentin, laskuharjoitusten sekä luentojen esitehtävien perusteella, voit vapaasti valita tehtävistä. Viisi pisteiltään parasta tehtävää lasketaan arvosanaan.

Jos teet **lopputentin**, kirjoita ensimmäiselle vastauspaperillesi **LOPPUTENTTI**. Lopputentin arvosana määräytyy pelkästään tentin perusteella ja kaikkien tehtävien pisteet lasketaan mukaan arvosanaan. *Oletusarvona tentti arvostellaan kurssitenttinä.*

- (a) Spin-1/2 hiukkasista koostuva hiukkassuihku preparoidaan tilaan  $|\psi_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{34}}|+\rangle + i\frac{5}{\sqrt{34}}|-\rangle$ . Suihku ajetaan  $z$ -suuntaisen Stern-Gerlach koneen läpi. Mitkä ovat spinin mahdolliset mittaustulokset ja millä todennäköisyyksillä nämä esiintyvät? (2p)  
(b) Tila  $|\phi_1\rangle$  on ortogonaalinen tilan  $|\psi_1\rangle$  kanssa. Määritä tilavektori  $|\phi_1\rangle$ . (2p)  
(c) Fysikaalista suurretta vastaava operaattori  $A$  operoi systeemin tilaan  $|\Psi\rangle$ . Kirjoita tämän operaation tulos, kun  $|\Psi\rangle$  ei ole  $A$ :n ominaistila. Onko  $A$  hermiittinen operaattori? (2p)
- Spin 1/2-systeemille spin-operaattorit  $S_x$ ,  $S_y$  ja  $S_z$  ovat matriisinotaatiossa ( $z$ -kannassa):

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Määritä operaattorin  $S_y$  ominaistilat  $z$ -kannassa. (2p)
  - Määritä kommutaattori  $[S_x, S_y]$ . (2p)
  - Oletetaan että systeemi on preparoitu tilaan  $|+\rangle$  ja spinin  $z$ -komponentti mitataan. Odotusarvo tälle mittaukselle on  $\langle S_z \rangle = \hbar/2$ . Mitä voit kertoa spinin suunnasta tässä tapauksessa (b)-kohdan tuloksen perusteella? (2p)
- Tarkastellaan hiukkasta, massa  $m$ , äärettömässä potentiaali-kaivossa, jossa  $V(x) = 0$ , kun  $0 \leq x \leq L$  ja muulloin  $V = \infty$ . Hiukkasen Hamilton operaattoria vastaavat aaltofunktiot ja energian ominaisarvot ovat

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Hiukkanen on ajanhetkellä  $t = 0$  superpositiotilassa

$$\psi(x, 0) = A[\varphi_1(x) - \varphi_2(x) + i\varphi_3(x)].$$

Määritä kerroin  $A$ . (2p)

- Mitkä ovat energian mahdolliset mittausravot? Kuinka suuri on energian odotusarvo ajanhetkellä  $t = 0$ ? (2p)

- Miten hiukkasen energiaspektri ja aaltofunktiot muuttuvat kvalitatiivisesti jos potentiaali alueen  $0 \leq x \leq L$  ulkopuolella onkin äärellinen vakioenergia  $V_0$ ? (2p)

KÄÄNNÄ PAPERIA



4. Tarkastele kuvassa olevaa potentiaalimuuria. Kvanttimekaaninen hiukkanen, jonka energia  $E > V_0$ , liikkuu kuvassa oikealle ja kohtaa muurin.

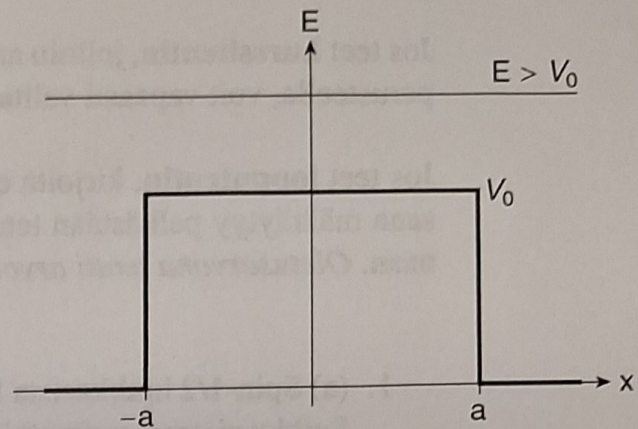
(a) Kirjoita yhtälöryhmä, jolla lähtisit ratkaisemaan hiukkasen läpäisy- ja heijastumiskertoimia. Mitkä reunaehdot sinun tulee ottaa huomioon? (3p)

(b) Hiukkasen läpäisykerroin tulee olemaan muotoa

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2 \left( \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E-V_0)} \right)}.$$

Millä energian arvoilla läpäisykerroin on suurimmillaan? (1p)

(c) Miksi läpäisykerroin on maksimeja/resonansseja? (2p)



5. Kvanttimekaaniselle harmoniselle värähtelijäpotentiaalille nosto- ( $a^\dagger$ ), lasku- ( $a$ ) ja Hamilton operaattori ( $H$ ) määritellään seuraavasti:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right), \quad H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

Hiukkanen harmonisessa värähtelijäpotentiaalissa on aluksi tilassa

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{3} [|0\rangle + 2|1\rangle + 2|2\rangle].$$

(a) Määritä tilan aikakehitys  $|\psi(t)\rangle$ . (1p)

(b) Riippuuko energian odotusarvo ajasta? Mikäli riippuu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippuva odotusarvo. Mikäli ei riipu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippumaton odotusarvo. (2p)

(c) Riippuuko liikemäärän odotusarvo ajasta? Mikäli riippuu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippuva odotusarvo. Mikäli ei riipu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippumaton odotusarvo. (3p)

Vinkki:  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ ,  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ,  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ .

6. Tarkastele tehtävän 3 äärettömässä potentiaalikaivossa olevaa hiukkasta. Hiukkasta häiritään häiriöhamiltonilla  $H' = LV_0\delta(x - L/2)$ , missä  $\delta(x)$  on Diracin delta funktio.

(a) Määritä häirityn hiukkasen sallitut energiat ensimmäiseen kertalukuun asti häiriöteorialla. (2p)

(b) Miksi ensimmäisen kertaluvun korjaukset energiaan häviävät joillekin tiloille? (2p)

(c) Kun perustilaa häiritään, mikä virittyneistä tiloista vaikuttaa eniten perustilan aaltofunktioon ensimmäisessä kertaluvussa? Perustele. (2p)

Vinkki: Yleisessä tapauksessa korjaukset ovat:

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle \quad |n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} |m^{(0)}\rangle$$

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi.

Tenttiin saa tuoda rajattomasti KÄSINKIRJOITETTUA muistiinpanoja