

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja kirjallisuus kielletty. Pisteitä myös hyvästä yrityksestä!

Arvostelusta: Tarkastaja pisteuttaa jokaisen tehtävän asteikolla 0...12. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

Huom. Matriisin $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ rivin j sarakkeen k alkioita merkitään $A_{jk} \in \mathbb{C}$.

1. (a) Etsi kaikki kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, joille $(z + 1)^4 = 16$.

(b) Etsi reaaliset matriisit A , joille pätee $AB = BA$, kun $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Etsi jotkin vektorit $u, v \in \mathbb{C}^{3 \times 1} \cong \mathbb{C}^3$, joille pätee $\langle Cu, v \rangle = C_{23}$ kaikilla $C \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ (tässä siis C_{23} on matriisin C rivin 2 sarakkeen 3 alkio).

2. Olkoot $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & s \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ja $b = \begin{bmatrix} t \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Millä parametrien $s, t \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöllä $Ax = b$

(a) ei ole ratkaisuja x ?

(b) on äärettömän monta ratkaisua x ?

(c) on tasan yksi ratkaisu x ?

3. Muistetaan, että $\langle u, A^*v \rangle = \langle Au, v \rangle$ ja $(A^*)_{jk} = (A_{kj})^*$.

(a) Olkoot $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Näytä, että $(AB)^* = B^*A^*$.

(b) Olkoon kääntyvä matriisi $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ symmetrinen (eli $S^* = S$). Näytä, että silloin myös S^{-1} on symmetrinen.

(c) Olkoon $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaarinen. Näytä, että U^{-1} on unitaarinen.

(d) Olkoot $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaarisia. Näytä, että UV on unitaarinen.

4. (a) Olkoon $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kääntyvä matriisi, jolla on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{C}$ ja vastaava ominaisvektori u . Näytä, että $\lambda \neq 0$ ja että $A^{-1}u = \lambda^{-1}u$.

(b) Oletetaan, että ei-kääntyvällä reaalisella matriisilla $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ on ominaisarvo $\lambda_1 = 4 + 5i$. Mitkä ovat sen muut ominaisarvot? Perustele!

(c) Näytä, että $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ovat matriisin $C = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$ ominaisvektoreita. Diagonalisoi matriisi C .