ELEC-C1320/ELEC-D1320 – Robotiikka/Robotics, Exam 7.12.2023

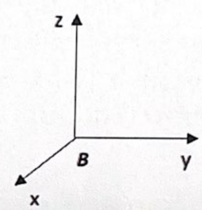
(3 hours)

It is allowed to use a calculator in the exam.

You can use Finnish, English or Swedish in your solutions. Tehtävänannot on esitetty suomeksi sinisellä värillä. The problem definitions are given in Finnish in blue color.

1. The homogenous transformation matrix ***T*** describes the position and orientation of a new coordinate frame {N} with respect to the base frame {B}:
Homogeeninen muunnosmatriisi ***T*** kuvaa uuden koordinaatiston {N} paikkaa ja asentoa peruskoordinaatiston {B} suhteen:

$$ {}^{B}\boldsymbol{T}_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



Illustrate the new coordinate frame {N} in relation to the base frame {B} (*i.e the position of the origin and the directions of the coordinate axes of the new frame {N} in relation to the base frame {B} shown in the drawing above*).
Esitä kuvan avulla uuden koordinaatiston {N} sijainti peruskoordinaatiston {B} suhteen (toisin sanoen, piirrä uuden koordinaatiston {N} origin paikka ja akselien suunnat suhteessa peruskoordinaatistoa {B} esittävään kuvaan, joka on annettu yllä)

(5 points)

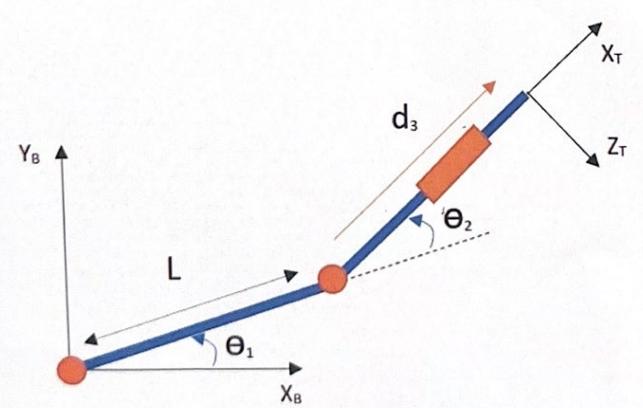
2. 3D-frame {B} is located initially coincident with the frame {A}. We first translate the origin of frame {B} **8 units** in the direction of its **X**-axis. Then we rotate the translated frame {B} about its **Y**-axis by **90 degrees**. And finally, we translate the origin of the rotated frame {B} **5 units** in the direction of its **Y**-axis. 3D-koordinaatisto {B} on aluksi samassa paikassa ja asennossa koordinaatiston {A} kanssa. Ensimmäisessä vaiheessa koordinaatiston {B} origon paikkaa siirretään **8 yksikköä** oman **X**-akselinsa suuntaan. Tämän jälkeen siirretyn koordinaatiston asentoa muutetaan kiertämällä sitä oman **Y**-akselinsa ympäri **90 astetta**. Lopuksi, kiertyneen koordinaatiston {B} origon paikkaa siirretään **5 yksikköä** oman **Y**-akselinsa suuntaan.

a) Give the 4x4 homogenous transformation matrix, which describes the position and orientation of frame **{A}** with respect to frame **{B}**. Määritä 4x4 homogeeninen muunnosmatriisi, joka kuvaa koordinaatiston **{A}** paikkaa ja asentoa koordinaatiston **{B}** suhteen. (7 points)

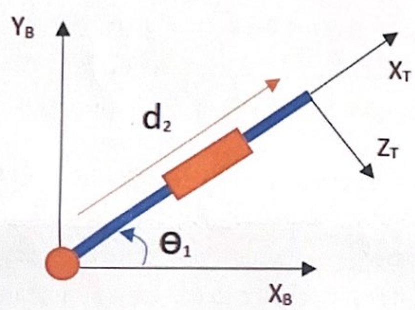
b) The coordinates of a point **P** with respect to frame **{B}** are [x=0,y=6,z=0]. What are the coordinates of point **P** given with respect to frame **{A}**? Pisteen **P** koordinaatit koordinaatiston **{B}** suhteen ovat [x=0,y=6,z=0]. Mitkä ovat pisteen **P** koordinaatit koordinaatiston **{A}** suhteen? (7 points)

3. In the figure, the kinematic structure of a 3-degrees of freedom manipulator mechanism is shown. The first joint is rotational, rotating the rigid link (the length of which is L) with respect to the X-axis of frame {B} and corresponding to the control parameter Θ_1. The second joint is also rotational rotating the telescopic/prismatic link with respect to the rigid link and corresponding to the control parameter Θ_2. The third joint is prismatic, controlling the length of the prismatic link and corresponding to the control parameter d_3. When Θ_1 and Θ_2 have the value zero, the rigid link and the telescopic link are oriented horizontally, aligned with the X_B axis. In the joint configuration, shown in the figure, the angles Θ_1 and Θ_2 have a positive value. Kuvassa on esitetty 3-liikevapausasteisen manipulaattorimekanismin kinemaattinen rakenne. Mekanismin ensimmäinen liikevapausaste on kiertyvä, kiertäen kiinteää vartta (jonka pituus on L) {B} koordinaatiston X-akselin suhteen, vastaten ohjausparametria Θ_1. Mekanismin toinen liikevapausaste on myös kiertyvä, kiertäen teleskooppivartta kiinteän varren suhteen, vastaten ohjausparametria Θ_2. Mekanismin kolmas liikevapausaste on prismaattinen ja sen avulla voidaan ohjata teleskooppivarren pituutta ohjausparametrin d_3 kautta. Kun nivelohjauskulmat Θ_1 ja Θ_2 saavat arvon nolla, mekanismin kiinteä varsi ja teleskooppivarsi ovat vaakasuorassa asennossa X_B-akselin päällä. Kuvan esittämässä tilanteessa kulmien Θ_1 ja Θ_2 arvot ovat positiivisia.

Solve the forward kinematics problem of the manipulator to describe the tool frame {T} with respect to the robot base frame {B}. In other words, assign the link frames in the figure and provide the corresponding DenavitHartenberg-parameters in a table. Give also the required Base- and Tool-transformation matrices. It is your choice to use either the Standard or Modified DH-parameter convention. Ratkaise manipulaattorin suora kinemaattinen muunnos, joka kuvaa työkalukoordinaatiston {T} paikkaa ja asentoa robotin peruskoordinaatiston {B} suhteen. Toisin sanoen, merkitse mekanismin nivel-/varsikoordinaatistot kuvaan sekä esitä vastaavat DenavitHartenberg-parametrit taulukossa. Anna myös tarvittavat Base- ja Tool-muunnosmatriisit. Voit vapaasti valita kumpaa DH-parametriesitystä käytät ratkaisussasi, eli vaihtoehtoina ovat "Standard"- tai "Modified"-parametrointitavat. (18 points)



4. Find **the inverse kinematic transform** for the 2 degrees of freedom manipulator mechanism, shown in the figure below. More specifically, find the equations $\theta_1=f(x,y)$, $d_2=f(x,y)$ where (x,y) is the position of the origin of the tool frame {T} with respect to the xy-plane of the base frame {B} and (θ_1,d_2) are the joint control parameters of the robot. When θ_1 has the value zero, the telescopic link is oriented horizontally, aligned with the X_B axis. In the joint configuration, shown in the figure, the angle θ_1 has a positive value. Ratkaise **käänteinen kinemaattinen muunnos** kuvassa näkyvälle 2-liikevapausasteen manipulaattorimekanismille. Toisin sanoen muodosta yhtälöt $\theta_1=f(x,y)$, $d_2=f(x,y)$ missä (x,y) on työkalukoordinaatiston {T} origon paikka peruskoordinaatiston {B} xy-tasossa ja (θ_1,d_2) ovat robotin nivelohjausparametrit. Kun ohjausparametri θ_1 saa arvon nolla, teleskooppivarsi on vaakasuorassa asennossa X_B-akselin päällä. Kuvan esittämässä tilanteessa kulman θ_1 arvo on positiivinen. (13 points)

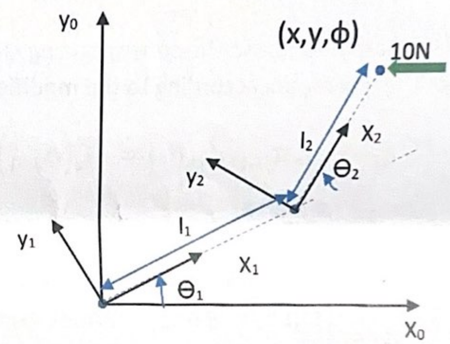


5. A force of **10N** is exerted to the tip of the last link of the two-link planar manipulator shown in the figure (*at the location of the blue dot*). The direction of the force is along the negative X_0-axis. The task is to calculate load torques affecting joints 1 and 2 (due to the external force) in two different configurations of the manipulator arm. To solve the problem **you must utilize the Jacobian matrix** of the manipulator. **10N** suuruinen ulkoinen voima kohdistuu kuvassa näkyvän 2-akselisen manipulaattorin ulomman varren päähän (merkitty sinisellä pisteellä kuvassa). Ulkoinen voimavektori vaikuttaa negatiivisen X_0-akselin suuntaan. Tehtävänä on laskea robotin niveliin (ulkoisen voiman vaikutuksesta) kohdistuvat kuormitusmomentit kahdessa eri robotin nivelkonfiguraatio-asennossa. Tehtävän oikea ratkaisu **edellyttää manipulaattorin Jakobiaanimatriisin hyödyntämistä** ratkaisussa.

a) $\theta_1 = 0.0°, \theta_2 = 0.0°$ (5 points)

b) $\theta_1 = 90.0°, \theta_2 = 90.0°$ (5 points)

The link lengths are $l_1 = 0.5m, l_2 = 0.4m.$

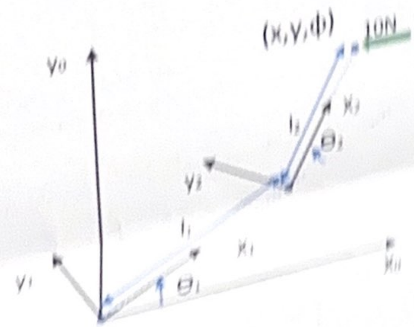


The Jacobian matrix of the planar two-link manipulator is:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = {}^0J(q) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^0J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

where C_{12} means $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ and so on.

5. A force of **10N** is exerted to the tip of the last link of the two-link planar manipulator shown in the figure (*at the location of the blue dot*). The direction of the force is along the negative X_0 axis. The task is to calculate load torques affecting joints 1 and 2 (due to the external force) in two different configurations of the manipulator arm. To solve the problem **you must utilize the Jacobian matrix of the manipulator.** **10N** suuruinen ulkoinen voima kohdistuu kuvassa näkyvän 2-akselisen manipulaattorin ulomman varren päähän (merkitty sinisellä pisteellä kuvassa). Ulkoinen voimavektori vaikuttaa negatiivisen X_0-akselin suuntaan. Tehtävänä on laskea robotin niveliin (ulkoisen voiman vaikutuksesta) kohdistuvat kuormitusmomentit kahdessa eri robotin nivelkonfiguraatio-asennossa. Tehtävän oikea ratkaisu **edellyttää manipulaattorin Jakobiaanimatriisin hyödyntämistä** ratkaisussa.



a) $\theta_1 = 0.0°, \theta_2 = 0.0°$ (5 points)

b) $\theta_1 = 90.0°, \theta_2 = 90.0°$ (5 points)

The link lengths are $l_1 = 0.5m, l_2 = 0.4m.$

The Jacobian matrix of the planar two-link manipulator is:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix} = {}^0J(q)\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}, \quad {}^0J(q) = \begin{bmatrix}-l_1s_1 - l_2s_{12} & -l_2s_{12}\\ l_1c_1 + l_2c_{12} & l_2c_{12}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

nd so

ELEC-C1320 Robotiikka - Equations

Link parameters and the corresponding elementary transformations as well as the symbolic form of the link matrix according to the **standard** Denavit and Hartenberg parameter convention:

$$^{j-1}\xi_j\left(\theta_j, d_j, a_j, \alpha_j\right) = \mathcal{R}_z\left(\theta_j\right) \oplus \mathcal{T}_z\left(d_j\right) \oplus \mathcal{T}_x\left(a_j\right) \oplus \mathcal{R}_x\left(\alpha_j\right)$$

$$^{j-1}\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j\cos\alpha_j & \sin\theta_j\sin\alpha_j & a_j\cos\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j\cos\alpha_j & -\cos\theta_j\sin\alpha_j & a_j\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_j & \cos\alpha_j & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Link parameters and the corresponding elementary transformations as well as the symbolic form of the link matrix according to the **modified** Denavit and Hartenberg parameter convention:

$$^{j-1}\xi_j\left(\alpha_{j-1}, a_{j-1}, d_j, \theta_j\right) = \mathcal{R}_x\left(\alpha_{j-1}\right) \oplus \mathcal{T}_x\left(a_{j-1}\right) \oplus \mathcal{T}_z\left(d_j\right) \oplus \mathcal{R}_z\left(\theta_j\right)$$

$$^{j-1}\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 & a_{j-1} \\ \sin\theta_j\cos\alpha_{j-1} & \cos\theta_j\cos\alpha_{j-1} & -\sin\alpha_{j-1} & -\sin\alpha_{j-1}\,d_j \\ \sin\theta_j\sin\alpha_{j-1} & \cos\theta_j\sin\alpha_{j-1} & \cos\alpha_{j-1} & \cos\alpha_{j-1}\,d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementary rotation transformations (i.e. rotations about principal axis by Θ):

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse of a 4x4 transformation matrix:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R & t \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T t \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

Derivation of trigonometric functions:

Dsinx = cosx

Dcosx = - sinx

Definition of (manipulator) Jacobian matrix:

If $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$ and $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ then the Jacobian is the $m \times n$ matrix

$$J = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobian transpose transforms a wrench (a vector of forces and torques) applied at the end-effector, ${}^0\boldsymbol{W}$, to torques and forces experienced at the joints $\boldsymbol{Q}$:

$$Q = {}^0J(q)^T \, {}^0W \qquad (8.9)$$