



Loppukoe ja tentti 7.12.2023 klo 9.00–12.00.

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1  
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1  
MS-A0107 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Malinen  
Malinen  
Alestalo

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä selkeällä käsialalla **kaikki** otsaketiedot kuten nimesi ja opiskelijanumerosi kaikkiin vastauspapereihin.

**Loppukoe tai uusinta:** Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.  
**Yleinen tentti:** Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen voi yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + voimassa olevat laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Määritä kaikki reaaliluvut  $x \in \mathbb{R}$ , joilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2}}{n!} x^n$$

suppenee. Tutki myös mahdolliset suppenemisvälin päätepisteet. (6p)

2. a) Laske raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos(3x)}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla. (3p)

b) Määritä funktion  $f(x) = (x-1)\sin(3x)$  Maclaurin-polynomi  $P_5(x)$ . (3p)

(Maclaurin-polynomi on Taylor-polynomi, jonka kehityskeskipiste to-  
teuttaa  $x_0 = 0$ ).

**KÄÄNNÄ!**



3. Olkoon  $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$  kun  $x > 0$ .

- Päättele alla olevan taulukon avulla, että  $f(1) = \frac{\pi}{2}$ . (2p)
- Osoita derivoimalla, että  $f'(x) = 0$  kaikilla  $x > 0$ . (2p)
- Laske  $f(\sqrt[3]{\pi} + e^2)$ . (2p)

4. Laske integraalit

$$\int_1^e x \ln x \, dx \quad \text{ja} \quad \int_1^{\pi^3} \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \, dx.$$

**Vihje:** Ensimmäinen integroimalla osittain, mutta miten? Jälkimmäiseen voi sijoittaa  $x = u^3$ , ja siitä eteenpäin tilanteen mukaan. (3p + 3p)

5. Etsi lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$xy'(x) + 2y(x) = 1, \quad x > 0,$$

se ratkaisu, joka toteuttaa  $y(1) = 1$ .

6. Määritä differentiaaliyhtälön  $y''(x) + 4y(x) = x^2$  yleinen ratkaisu. (6p)

**Lisätieto:** Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$\alpha$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0

**Eräitä kaavoja:**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

**KÄÄNNÄ!**