ELEC-A7200 Signals and Systems

Midterm exam/välikoe/mellanprov I

Problem/Tehtävä/Problem 1

Figure 1a and 1b illustrates the two-sided amplitude and phase spectrum, respectively, of a periodic signal $x_1(t)$. Let the signal periodicity $T_0 = 1$ ms.

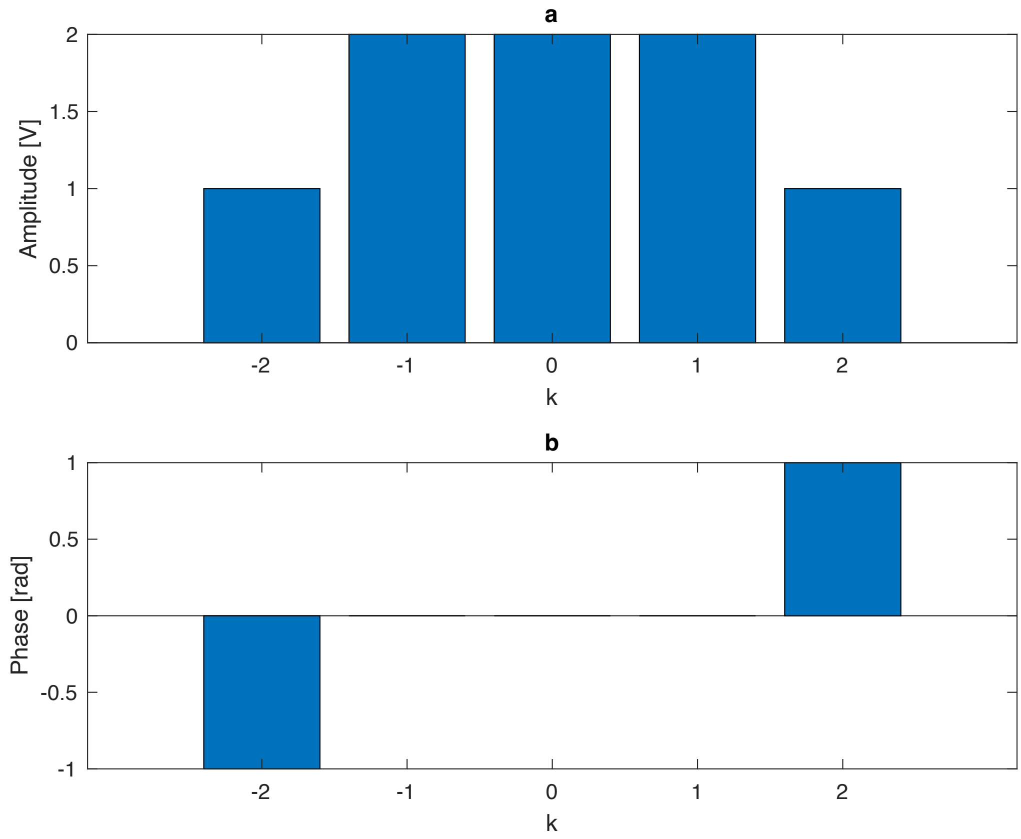
a) Determine the mean power of the signal. (2 p)
b) Express $x_1(t)$ using trigonometric functions. (2 p)
c) Sketch the two-sided power spectrum of the signal. (1 p)
d) Sketch the one-sided power spectrum of the signal. (1 p)

Erään jaksollisen signaalin $x_1(t)$ amplitudi- ja vaihespektrit on esitetty kuvissa 1a ja 1b. Olkoon signaalin jaksonaika $T_0 = 1$ ms.

a) Ratkaise signaalin keskimääräinen teho. (2 p)
b) Esitä signaali $x_1(t)$ käyttäen trigonometrisiä funktioita. (2 p)
c) Hahmottele signaalin kaksipuolinen tehospektri. (1 p)
d) Hahmottele signaalin yksipuolinen tehospektri. (1 p)

Figur 1a och 1b illustrerar den tvåsidiga amplitud- och fasspektrumet, respektive, för en periodisk signal $x_1(t)$. Låt signalens periodicitet $T_0 = 1$ ms.

a) Beräkna signalens medeleffekt. (2 p)
b) Presentera signalen $x_1(t)$ med hjälp av trigonometriska funktioner. (2 p)
c) Skissa signalens tvåsidiga effektspektrum. (1 p)
d) Skissa signalens ensidiga effektspektrum. (1 p)



Figure/Kuva/Figur 1

Problem/Tehtävä/Problem 2

Consider a triangular pulse

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T_0}|t| & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

a) Determine the time derivative $x_3(t) = \frac{d}{dt}x_2(t)$ of the pulse $x_2(t)$. (2 p)
b) Determine the Fourier transform of the pulse $x_3(t)$. (2 p)
c) Determine the Fourier transform of the pulse $x_2(t)$. (2 p)

Tarkastellaan kolmiopulssia

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T_0}|t| & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

a) Ratkaise pulssin $x_2(t)$ aikaderivaatta $x_3(t) = \frac{d}{dt}x_2(t)$. (2 p)
b) Ratkaise pulssin $x_3(t)$ Fourier-muunnos. (2 p)
c) Ratkaise pulssin $x_2(t)$ Fourier-muunnos (2 p)

Betrakta en trianglepuls

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T_0}|t| & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

a) Bestäm tidsderivatan $x_3(t) = \frac{d}{dt}x_2(t)$ av pulsen $x_2(t)$. (2 p)
b) Bestäm Fouriertransformen av pulsen $x_3(t)$ (2 p)
c) Bestäm Fouriertransformen av pulsen $x_2(t)$ (2 p)

Problem/Tehtävä/Problem 3

a) Determine the step response of a RC filter by solving the following convolution integral

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Where

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

denotes the impulse response of the filter and

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Denotes the unit step function. (3 p)

b) Consider two rectangular pulses of different length

$p_k(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_k}{2}}{T_k}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, k=1,2

where $T_1 = 1$ and $T_2 = 2$. Using the Gram-Smith procedure, find orthonormal basis for the pulses and express them with respect to that basis. (3 p)

a) Ratkaise RC -suodattimen askelvaste, laskemalla oheinen konvoluutiointegraali

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

missä

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

on suodattimen impulssivaste ja

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

on yksikköaskelfunktio. (3 p)

a) Tarkastellaan kahta eripituista kanttipulssia

$$p_k(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_k}{2}}{T_k}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_k \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}, k\text{=1,2}$$

jossa $T_1 = 1$ ja $T_2 = 2$. Ratkaise pulseille ortonormaalit kantafunktiot käyttäen Gram-Smith prosesuuria ja esitä signaali näiden kantafunktioiden avulla (3 p)

a) Bestäm stegsvaret för ett RC-filter genom att lösa följande faltningsintegral

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

där

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

betecknar filtrets impulssvar of

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

betecknar enhetsstegsfunktionen. (3 p)

a) Betrakta två rektangulära pulser av olika längd

$$p_k(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_k}{2}}{T_k}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, k\text{=1,2}$$

där $T_1 = 1$ och $T_2 = 2$. Med hjälp av Gram-Schmidts metod, hitta en ortonormerad bas för pulserna och uttryck dem med avseende på den basen. (3 p)

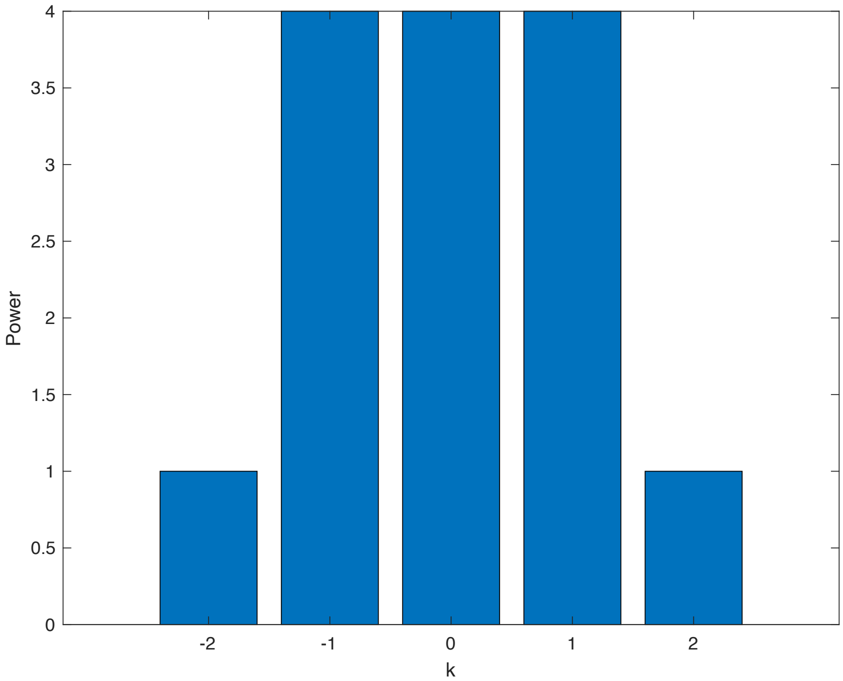
Solutions

1.

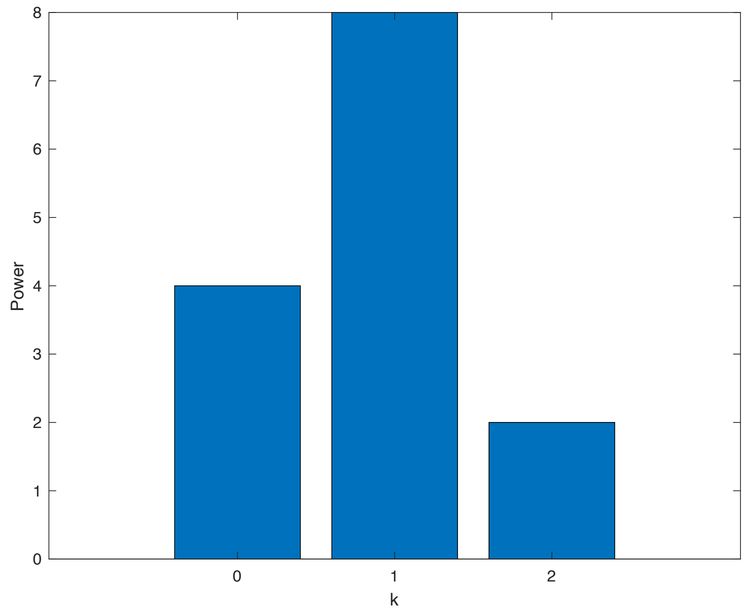
a) Using the Parseval’s theorem, generalized power of the signal is $P = 14$

b) $x(t) = 2\cos(4000\pi t + 1 \quad) + 4\cos(2000\pi \mathrm{t} \quad) + 2$

c)



d)



2.

a) Time derivative of a triangular pulse:

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = \begin{cases} \frac{2}{T_0} & -\frac{T_0}{2} \leq t < 0 \\ -\frac{2}{T_0} & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases} = \frac{2}{T_0}\mathrm{rect}\left(\frac{t + \frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\right) - \frac{2}{T_0}\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\right)$$

b) Fourier-transform of $x_3(t) = \frac{d}{dt}x_2(t)$:

$$X_3(f) = \mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right) i2\sin\left(\pi f\frac{T_0}{2}\right)$$

c)

$$X_3(f) = \frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T_0}{2}\right)$$

3.

a) Convolution integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Case 1 $t \leq 0$: $y(t) = 0$

Case 2 $t > 0$: $y(t) = 1 - e^{-t}$

b)

Solution 1: This is for the case $p_k(t) = \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T_k}{2}}{T_k}\right)$

$$\phi_1(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$
$$\phi_2(t) = \text{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

We thus have

$$p_1(t) = \phi_1(t)$$
$$p_2(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)$$

Solution 2: This is for the case $p_k(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{t}{2T_k}\right)$

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$\phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) - \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

We thus have

$$p_1(t) = \sqrt{2}\,\phi_1(t)$$
$$p_2(t) = \sqrt{2}(\,\phi_2(t) + \phi_1(t))$$