Aalto-yliopisto

MS-A0202

Loppukoe ja yleinen tentti, 17.10.2023 klo 16.30-19.30

Kokeessa ei saa käyttää laskimia, taulukkokirjoja eikä lunttilappuja.
Muista perustella vastaukset huolella, ellei tehtävässä toisin sanota.

Loppukoe: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Tee kaikki 6 tehtävää.

Merkitse kokeeseen oletko tekemässä loppukoetta vai yleistä tenttiä. Jokainen kurssille osallistunut voi halutessaan tehdä kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".
Jokainen tehtävä on 6 p. arvoinen.

Tehtävä 1: Tässä tehtävässä riittää pelkkä vastaus, perusteluja ei tarvita.

(a) Selitä lyhyesti, mikä on useamman muuttujan reaaliarvoisen funktion kriittinen piste. *(1p.)*

(b) Selitä lyhyesti, mikä on sylinterikoordinaatisto. *(1p.)*

(c) Anna esimerkki funktiosta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jonka Jakobin matriisi pisteessä $(0,0)$ on $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *(1p.)*

(d) Anna esimerkki funktiosta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla on pisteessä $(0,0)$ satulapiste. *(1p.)*

(e) Mikä tai mitkä seuraavista integraaleista on integraali kolmion muotoisen alueen yli? *(1p.)*

$$(A) = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)dydx, \quad (B) = \int_0^1 \int_0^{x} f(x,y)dydx, \quad (C) = \int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)dxdy$$

Tehtävä 2: a) Tarkastellaan käyrää

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}, t \in [0,2].$$

Esitä käyrä muodossa $y = f(x)$ tai $x = f(y)$ (eli eliminoi muuttuja t ylläolevasta yhtälöparista) ja kerro, miltä käyrä näyttää. *(2 p.)*

b) Laske käyrän

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

pituus pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(18,9)$. *(4 p.)*

Tehtävä 3: Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{kun } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{kun } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Osoita, että funktion f arvot lähestyvät nollaa lähestyttäessä origoa pitkin mitä tahansa origon kautta kulkevaa suoraa. *(4 p.)*

b) Onko funktio f jatkuva origossa? Perustele vastauksesi. *(2 p.)*

Tehtävä 4: Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ja $f(x,y,z) = xe^y + z^2 + 3y$.

a) Määritä, jokin vektori, jonka suuntaisesti funktio f kasvaa nopeiten pisteessä $(1, \ln 2, 1/2)$. *(4 p.)*

b) Kuinka nopeasti se kasvaa tähän suuntaan? *(2 p.)*

Tehtävä 5: Laske

$$\iint_D \frac{\arctan(y/x)}{x^2+y^2}\, dA,$$

missä $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4 \quad \text{ja} \quad x > 0, y > 0\}$.

Tehtävä 6: Etsi Lagrangen kerroin -menetelmää käyttäen funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

ääriarvot, kun piste (x,y) on käyrällä $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.
Selitä (kuvan avulla tai muuten), miksi ääriarvokohdat ovat välttämättä juuri nämä.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Loppukokeen voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. Uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.