ELEC-A3110 Mekaniikka, syksy 23 **Välikoeuusinta, malliratkaisut**
opettaja: Matti Raasakka

Välikoe 1 uusinta

Tehtävä 1

Valitse laskun tulos (vaihtoehto A, B tai C), joka on pyöristetty oikeaan tarkkuuteen. Kirjoita vastaukset konseptipaperille. (+1p oikeasta vastauksesta, −1/2p väärästä, minimipisteet 0p)

a) $12{,}43\ \mathrm{s} + 1{,}2\ \mathrm{s} \approx \dots$ (A) 13,63 s, (B) 13,6 s, (C) 14 s.
b) $7{,}6\ \mathrm{m} - 0{,}23\ \mathrm{m} \approx \dots$ (A) 7,4 m, (B) 7,37 m, (C) 7,370 m.
c) $0{,}253\ \mathrm{K} + 11{,}2\ \mathrm{K} + 132{,}0\ \mathrm{K} \approx \dots$ (A) 143,45 K, (B) 143,5 K, (C) 143 K.
d) $7{,}35\ \mathrm{N} \cdot 0{,}15\ \mathrm{m} \approx \dots$ (A) 1,103 J, (B) 1,10 J, (C) 1,1 J.
e) $1300\ \mathrm{J}/143\ \mathrm{s} \approx \dots$ (A) $\frac{100}{11}$ W, (B) 9,09 W, (C) 9 W.
f) $\frac{13{,}20\ \mathrm{m}+0{,}53\ \mathrm{m}}{12{,}11\ \mathrm{s}} \approx \dots$ (A) 1,134 m/s, (B) 1,13 m/s, (C) 1,1 m/s.

Malliratkaisu

a) B, b) A, c) B, d) C, e) B, f) A

Tehtävä 2

Kappaleeseen (massa m), joka liikkuu x-y-tasossa, vaikuttaa voima $\vec{F}(t) = \alpha\hat{\imath} + \beta\cos(\omega t)\hat{\jmath}$, joka riippuu ajasta t. Tässä α, β ja ω ovat vakioita, ja $\hat{\imath}$,$\hat{\jmath}$ ovat x- ja y-suuntaiset yksikkövektorit. Ajanhetkellä $t = 0$ kappale lähtee origosta liikkeelle. Selvitä kappaleen etäisyys origosta ajanhetkellä t. (6p)

Malliratkaisu

Oletetaan, että kappale lähtee levosta liikkeelle ajanhetkellä $t = 0$. Newtonin 2. lain mukaan kappaleen kiihtyvyys on $\vec{a}(t) = \vec{F}/m$. (1p) Nopeuden muutos $\Delta\vec{v}(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}(0)$ saadaan kiihtyvyyden integraalina

$$\begin{aligned}\Delta\vec{v}(t) &= \int_0^t \frac{\vec{F}(t')}{m}\mathrm{d}t' \\ &= \int_0^t \left(\frac{\alpha}{m}\hat{\imath} + \frac{\beta}{m}\cos(\omega t')\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}t' \\ &= \frac{\alpha}{m}t\hat{\imath} + \frac{\beta}{m\omega}\sin(\omega t)\hat{\jmath}\,. \qquad \text{(2p)}\end{aligned}$$

Koska kappale lähtee levosta, niin $\vec{v}(t) = \Delta\vec{v}(t)$.

Paikan muutos $\Delta\vec{x}$ saadaan vastaavasti nopeuden integraalina

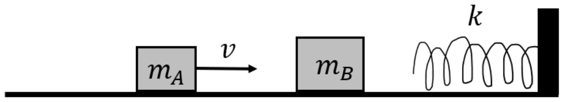
$$\begin{aligned}\Delta\vec{x}(t) &= \int_0^t \vec{v}(t')\mathrm{d}t' \\ &= \int_0^t \left(\frac{\alpha}{m}t'\hat{\imath} + \frac{\beta}{m\omega}\sin(\omega t')\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}t' \\ &= \frac{\alpha}{2m}t^2\hat{\imath} - \frac{\beta}{m\omega^2}\cos(\omega t)\hat{\jmath}\,. \qquad \text{(2p)}\end{aligned}$$

Etäisyydelle origosta saadaan siis

$$\|\Delta\vec{x}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}t^2\right)^2 + \left(\frac{\beta}{m\omega^2}\cos(\omega t)\right)^2}\,. \qquad \text{(1p)}$$

Tehtävä 3

Tarkastellaan alla kuvatun kaltaista tilannetta. Kaksi laatikkoa A ja B (massat m_A,m_B) liukuvat vaakasuoralla tasolla kitkatta. Aluksi laatikko A on liikkeessä oikealle kohti laatikkoa B nopeudella v, ja laatikko B on paikallaan. Kun laatikko A osuu laatikkoon B, niin laatikot törmäävät toisiinsa täysin elastisesti. Laatikon B oikealla puolella on jousi (jousivakio k), josta laatikko B kimpoaa vastakkaiseen suuntaan liikuttuaan törmäyksen jälkeen oikealle jouseen asti. Törmäävätkö laatikot aina toisiinsa vielä toisen kerran laatikon B kimmottua jousesta takaisinpäin? Jos eivät, niin määritä suureille m_1, m_2, v ja k ehdot, jotka niiden täytyy toteuttaa, jotta laatikot eivät törmää toisiinsa toista kertaa. Voit olettaa, että taso, jolla laatikot liikkuvat, jatkuu äärettömän kauas vasemmalle, ja että jousi on ideaalinen. (6p)



Malliratkaisu

Ratkaistaan ensin laatikkojen nopeudet törmäyksen jälkeen. Valitaan positiivinen suunta oikealle. Merkitään laatikkojen törmäyksen jälkeisiä nopeuksia w_A ja w_B. Tilanteessa kokonaisliikemäärä säilyy, koska ulkoiset voimat kumoavat toisensa. (0,5p) Kokonaisliikemäärän säilymisestä saadaan yhtälö

$$m_A v = m_A w_A + m_B w_B \,. \quad \text{(0,5p)} \tag{1}$$

Koska törmäys on täysin elastinen, myös mekaaninen energia säilyy törmäyksessä. (0,5p) Törmäyksessä vain laatikkojen liike-energia muuttuu, joten mekaanisen energian säilymisestä saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A w_A^2 + \frac{1}{2} m_B w_B^2 \,. \quad \text{(0,5p)} \tag{2}$$

Yhtälöstä (1) saadaan muokkaamalla

$$m_A(v - w_A) = m_B w_B \,,$$

ja yhtälöstä (2) vastaavasti

$$\begin{aligned} & m_A(v^2 - w_A^2) = m_B w_B^2 \\ \Rightarrow \quad & m_A(v - w_A)(v + w_A) = m_B w_B^2 \,. \end{aligned}$$

Jakamalla jälkimmäinen näistä yhtälöistä ensimmäisellä puolittain saadaan

$$v + w_A = w_B \,.$$

Sijoitetaan tästä w_B yhtälöön (1), ja saadaan ratkaistua laatikon A törmäyksen jälkeiseksi nopeudeksi

$$\begin{aligned} & m_A v = m_A w_A + m_B(v + w_A) \\ \Rightarrow \quad & w_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v \,. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Laatikon B törmäyksen jälkeiselle nopeudelle saadaan vastaavasti

$$w_B = v + w_A = \left(1 + \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v \,. \quad \text{(1p)}$$

Törmäyksen jälkeen laatikko B lähtee liukumaan oikealle kohti jousta. Laatikon A liikkeen suunta riippuu massojen suuruuksista: tapauksessa $m_A > m_B$ se liikkuu myös oikealle, mutta tapauksessa $m_A < m_B$ vasemmalle. Joka tapauksessa laatikko B osuu jouseen, ja kimpoaa siitä takaisinpäin yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella nopeudella jousivakiosta riippumatta, sillä jousivoima on konservatiivinen. Näin ollen laatikon B nopeus jousesta kimpoamisen jälkeen on $-w_B$, jos laatikot eivät ennen sitä jo törmää toisiinsa. (1p)

Selvästikin, jos molemmat laatikot liikkuvat törmäyksen jälkeen oikealle, niin ne törmäävät toisiinsa viimeistään sen jälkeen, kun laatikko B on kimmonnut takaisinpäin jousesta. Myöskin, jos $|w_B| > |w_A|$, niin laatikko B saavuttaa laatikon kimmottuaan jousesta, vaikka laatikko A liikkuisikin vasemmalle törmäyksen jälkeen. Ainoa tapaus, jossa laatikot eivät törmää toisiinsa toista kertaa, on tilanne, jossa laatikko A liikkuu törmäyksen jälkeen vasemmalle nopeudella, joka on itseisarvoltaan suurempi tai yhtä suuri kuin w_B. Saadaan siis ehto

$$\begin{aligned} -w_A &\geq w_B \\ -\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v &\geq \frac{2m_A}{m_A + m_B} v \\ m_B - m_A &\geq 2m_A \\ m_B &\geq 3m_A \,. \end{aligned}$$

Laatikot eivät siis törmää toisiinsa toista kertaa, jos $m_B \geq 3m_A$. (0,5p) Laatikon A alkunopeus v ja jousivakio k voivat olla mitkä tahansa. (0,5p)

Välikoe 2 uusinta

Tehtävä 1

Valitse oikeat väitteet, ja kirjoita niitä vastaavat kirjaimet konseptipaperille. (Oikeasta väitteestä +1p, väärästä valinnasta −1p. Kokonaispisteet kuitenkin minimissään 0.)

A) Massakeskipiste ja painopiste ovat aina samassa paikassa, jos kappaleen tiheys on vakio.
B) Yksinkertaisessa harmonisessa liikkeessä kappaleen kiihtyvyys on suurin liikkeen äärikohdissa.
C) Kun jäykkä kappale pyörii vakioisella kulmanopeudella jonkin kiinnitetyn akselin ympäri, niin kaikilla kappaleen pisteillä on sama nopeus.
D) Ideaaliheiluri suorittaa yksinkertaista harmonista liikettä.
E) Jännitetyssä narussa aallot liikkuvat sitä nopeampaa, mitä kireämmälle naru on viritetty.
F) Planeetta kiertää tähteä elliptisellä kiertoradalla, jonka keskipisteessä tähti sijaitsee.
G) Painovoima aiheuttaa pyörimisliikkeessä olevaan hyrrään vaakasuuntaisen voimanmomentin.
H) Mitä enemmän kappaleella on massaa, sitä nopeammin se putoaa painovoiman vaikutuksesta.
I) Tasaista ympyräliikettä suorittavan pistemassan kulmaliikemäärä on vakio ympyräradan keskipisteen suhteen.
J) Nesteeseen upotettuun kappaleeseen kohdistuva noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän nestetilavuuden paino.
K) Olomuodonmuutoksissa aineen lämpötila muuttuu tasaisesti.
L) Entropia voi periaatteessa pienentyä termodynaamisen prosessin aikana, mutta se on äärimmäisen epätodennäköistä makroskooppisille systeemeille.

Malliratkaisu

B, E, G, I, J, L

Tehtävä 2

Pallo (massa m) heitetään suoraan edestä päin nopeudella v_1 keskelle neliönmuotoista ovea (massa M, sivunpituus l). Ovi pääsee kääntymään kitkattomasti toisella reunalla olevien saranoidensa suhteen (hitausmomentti $I = \frac{1}{3}Ml^2$ tämän akselin suhteen). Törmättyään oveen pallo kimpoaa takaisinpäin tulosuuntaansa nopeudella v_2. Ratkaise oven kulmanopeus pallon törmäyksen jälkeen. (6p)

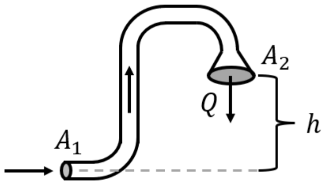
Malliratkaisu

Voimanmomentit oven saranoiden läpi kulkevan akselin suhteen kumoavat toisensa, joten kokonaiskulmaliikemäärä tämän akselin suhteen säilyy. (1p) Valitaan positiivinen kiertosuunta oven kääntymissuuntaan. Pallon kulmaliikemäärä juuri ennen törmäystä: $L_{p,1} = mv_1\frac{l}{2}$. (1p) Pallon kulmaliikemäärä juuri törmäyksen jälkeen: $L_{p,2} = -mv_2\frac{l}{2}$. (1p) Ovella ei ole kulmaliikemäärää ennen törmäystä. (1p) Oven kulmaliikemäärä juuri törmäyksen jälkeen: $L_{o,2} = I\omega$. (1p) Kokonaiskulmaliikemäärän säilymisestä saadaan ratkaistua

$$\begin{aligned} L_{p,1} &= L_{p,2} + L_{o,2} \\ mv_1 \frac{l}{2} &= -mv_2 \frac{l}{2} + I\omega \\ \omega &= \frac{m(v_1+v_2)l}{2I} = \frac{3}{2}\frac{m}{M}\frac{v_1+v_2}{l}\,. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Tehtävä 3

Kylpylään suunnitellaan alla olevassa kuvassa hahmotellun kaltaisia suihkuja. Vesi tulee suihkuun lattian alla kulkevasta putkesta, jonka läpileikkauksen pinta-ala on A_1 ja korkeusero suihkupäähän h. Suihkupään läpileikkauksen pinta-ala on A_2. Kuinka suuri suhteellinen paine täytyy vesiputkessa olla läpileikkauksen A_1 kohdalla, jotta veden virtausnopeus suihkusta olisi Q (yksikkö $\mathrm{m^3/s}$)? Voit merkitä vastauksessasi veden tiheyttä symbolilla ρ ja putoamiskiihtyvyyttä symbolilla g. (6p)



Malliratkaisu

Merkitään veden virtausnopeutta metreinä sekunnissa läpileikkauksen A_i kohdalla symbolilla v_i. Veden virtausnopeudeksi metreinä sekunnissa suihkupään kohdalla saadaan $v_2 = Q/A_2$. (1p) Koska vettä ei häviä putkesta mihinkään, niin jatkuvuusyhtälön mukaisesti saadaan $A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$, joten $v_1 = Q/A_1$. (1p) Toisaalta Bernoullin yhtälön mukaan

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2\,,$$

missä p_i on paine putken eri kohdissa ja h_i korkeus. Muokkaamalla yhtälöä saadaan

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(h_2 - h_1)\,. \quad \text{(1p)}$$

Paine p_2 suihkupään kohdalla on normaali ilmanpaine, joten $p_1 - p_2$ on kysytty suhteellinen paine. (1p) Korkeusero $h_2 - h_1 = h$. Voidaan vielä sijoittaa ratkaistut virtausnopeudet, ja saadaan vastaukseksi annettujen suureiden avulla lausuttuna

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho Q^2\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right) + \rho g h\,. \quad \text{(2p)}$$