ELEC-A7200 Signals and Systems

Midterm exam/välikoe/mellanprov II, 8.12.2023

Problem/Tehtävä/Problem 1

[ENG] Consider a sinusoidal signal $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$ sampled at a frequency $f_s = 10\ kHz$. N=128 samples are obtained denoted as $x(m\Delta t)$ where $m = 0,1,2 \ldots, N\text{-}1$ and $\Delta t = \frac{1}{f_s}$. Figure 1a illustrates the power spectral density obtained by taking FFT of the samples directly. Figure 1b shows the spectrum with N=256 samples when 128 zeros are padded in the end of the original sequence prior to performing the FFT.

a) Determine the Nyquist frequency. (1p)
b) Determine the frequency of the sinusoid f_c. (2p)
c) Determine the frequency granularity with and without zero padding. (2p)
d) Explain why zero padding is used. (1p)

[FI] Tarkastellaan signaalia $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$, josta otetaan näytteitä taajuudella $f_s = 10\ kHz$. Näytteitä on N=128 ja merkitään $x(m\Delta t)$, missä $m = 0,1,2 \ldots, N\text{-}1$ ja $\Delta t = \frac{1}{f_s}$. Kuvassa 1a on näytteistä lasketun FFT:n antama tehotiheysspektri. Kuvassa 1b on vastaava spektri N=256 näytteellä, kun 128 nollaa lisätään näytejoukon loppuun ennen FFT:n ottamista.

a) Anna tilanteen Nyquistin taajuus. (1p)
b) Anna taajuus f_c. (2p)
c) Anna taajuusresoluutio ilman nollien lisäämistä ja niiden lisäämisen jälkeen. (2p)
d) Selitä miksi nollien lisäämistä tarvitaan. (1p)

[SVE] Betänk en sinussignal $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$ som samplas vid en frekvens $f_s = 10\ kHz$. N=128 prover erhålls och betecknas som $x(m\Delta t)$ där $m = 0,1,2 \ldots, N\text{-}1$ och $\Delta t = \frac{1}{f_s}$. Figur 1a illustrerar effektspektraltätheten som erhålls genom att direkt utföra FFT på proverna. Figur 1b visar spektrumet med N=256 prover, när 128 nollor läggs till i slutet av sekvensen innan FFT utförs.

a) Bestäm Nyquist frekvensen. (1p)
b) Bestäm signalens frekvens f_c. (2p)
c) Bestäm frekvensupplösningen med och utan nollfyllning. (2p)
d) Förklara varför nollfyllning används. (1p)

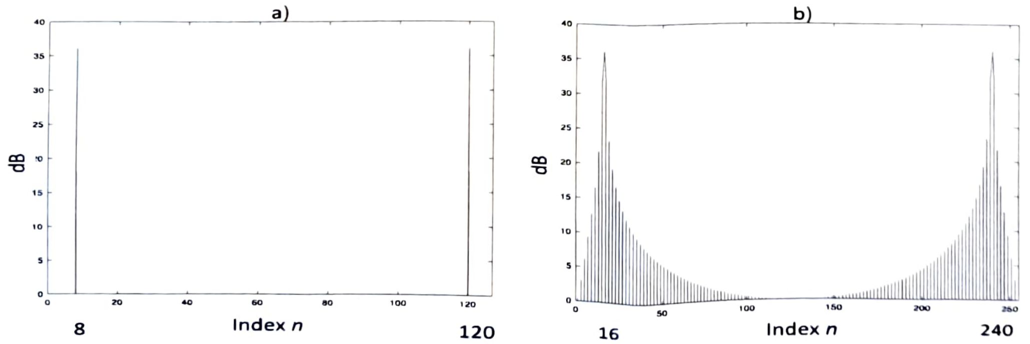

Figure 1. a) N=128 point FFT of sinusoid and b) N=256 point FFT of sinusoid with zero padding. In Figure 1a) the peaks correspond to n=8 and n=120. / Kuva 1. a) Signaalin N=128 näytteen FFT ja b) N=256 näytteen FFT nollien lisäämisen jälkeen. Kuvassa 1a piikit vastaavat näytteitä n=8 ja n=120. / Figur 1. a) N=128 punkters FFT av sinusoid och b) N=256 punkters FFT av sinusoid med nollfyllning. I figur 1a) motsvarar topparna n=8 och n=120.

Problem/Tehtävä/Problem 2

[ENG] Consider a memoryless nonlinear system $y(t) = x^2(t)$.

a) What frequencies does the output signal $y(t)$ contain if the input signal is $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(4000\pi t)$? (3p)

b) Consider a bandwidth limited input signal $x(t)$ having Fourier-transform $X(f) = \mathrm{rect}(f)$. Determine the Fourier-transform $Y(f)$ of output signal $y(t)$. (3p)

[FI] Tarkastellaan muistitonta epälineaarista systeemiä $y(t) = x^2(t)$.

a) Mitä taajuuksia ulostuleva signaali $y(t)$ sisältää, jos sisäänmenevä signaali on $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(4000\pi t)$? (3p)

b) Tarkastellaan kaistarajoitettua signaalia $x(t)$, jonka Fourier-muunnos on $X(f) = \mathrm{rect}(f)$. Laske ulostulevan signaalin $y(t)$ Fourier-muunnos $Y(f)$. (3p)

[SVE] Låt oss betrakta ett minneslöst icke-linjärt $y(t) = x^2(t)$.

a) Vilka frekvenser innehåller utgångssignalen y(t) om ingångssignalen är $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(4000\pi t)$? (3p)

b) Låt oss betrakta en begränsad bandbreddsinssignal $x(t)$ med Fourier-transformen $X(f) = \mathrm{rect}(f)$. Bestäm Fourier-transformen $Y(f)$ av utgångssignalen $y(t)$. (3p)

Problem/Tehtävä/Problem 3

[ENG] Consider a band limited white noise process $z(t)$ having autocorrelation function

$$r_{zz}(\tau) = \mathrm{E}\{z(t)z^*(t+\tau)\} = N_0 B \mathrm{sinc}(2B\tau).$$

a) Determine the power spectrum of the noise $S_{zz}(f)$. (2p)

b) Determine the mean power of the noise. (2p)

c) So called Brownian noise is obtained by passing the white noise $z(t)$ through an integrator circuit described by the LTI system $\frac{d}{dt}y(t) = z(t)$. Determine the power spectrum $S_{yy}(f)$ of the filtered noise $y(t)$. Hint: Determine first the frequency response of the LTI system. (2p)

[FI] Tarkastellaan kaistarajoitetun valkoisen kohinan prosessia $z(t)$, jolla on autokorrelaatiofunktio

$$r_{zz}(\tau) = \mathrm{E}\{z(t)z^*(t+\tau)\} = N_0 B \mathrm{sinc}(2B\tau).$$

a) Laske kohinan tehotiheysspektri $S_{zz}(f)$. (2p)

b) Laske kohinan keskiteho. (2p)

c) Ns. Brownin kohinaa saadaan johtamalla valkoinen kohina $z(t)$ integrointipiirin läpi, jota kuvaa LTI systeemi $\frac{d}{dt}y(t) = z(t)$. Määrittele suodatetun signaalin $y(t)$ tehotiheysspektri $S_{yy}(f)$. Vihje: Laske ensin LTI systemin taajuusvaste. (2p)

[SVE] Låt oss betrakta en bandbegränsad vitt brus-process $z(t)$ med autokorrelationsfunktionen

$$r_{zz}(\tau) = \mathrm{E}\{z(t)z^*(t+\tau)\} = N_0 B \mathrm{sinc}(2B\tau).$$

a) Bestäm effektspektret för bruset $S_{zz}(f)$. (2p)

b) Bestäm medeleffekten av bruset. (2p)

c) Så kallat Brownskt brus erhålls genom att låta det vita bruset $z(t)$ passera genom en integrator krets beskriven av det LTI-systemet $\frac{d}{dt}y(t) = z(t)$. Bestäm effektspektret $S_{yy}(f)$ för det filtrerade bruset $y(t)$. Tips: Bestäm först frekvensresponsen för det LTI-systemet. (2p)

Theorems of the fourier transform	Function	Transform
Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Time delay or time shift	$x(t-a)$	$X(f)e^{-j2\pi fa}$
Scale change	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{a})$
Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Duality	$X(t)$	$x(-f)$
Frequency shift	$x(t)e^{j2\pi at}$	$X(f-a)$
Linear modulation	$x(t)\cos(2\pi at + b)$	$\frac{e^{jb}X(f-a)+e^{-jb}X(f+a)}{2}$
Differentiation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}$
Convolution	$x(t) \otimes y(t)$	$X(f)Y(f)$
Multiplication	$x(t)y(t)$	$X(f) \otimes Y(f)$
Multiplication by t^n	$t^n x(t)$	$-\frac{1}{j2\pi}\frac{d^n X(f)}{df^n}$

Fourier transforms	Function	Transform
Rectangular pulse	$\mathrm{rect}(t/a)$	$a \cdot \mathrm{sinc}(af)$
Triangular pulse	$\mathrm{tria}(t/a)$	$a \cdot \mathrm{sinc}^2(af)$
Gaussian pulse	$e^{-\pi(\frac{t}{a})^2}$	$a \cdot e^{-\pi(af)^2}$
One sided exponential pulse	$e^{-t/a}u(t)$	$\frac{a}{1+j2\pi fa}$
Two sided exponential pulse	$e^{-\lvert t\rvert/a}$	$\frac{2a}{1+(2\pi fa)^2}$
Sinc pulse	$\mathrm{sinc}(at)$	$\frac{1}{a}\mathrm{rect}(f/a)$
Constant	a	$a \cdot \delta(f)$
Phasor	$e^{j(2\pi at+b)}$	$e^{jb}\delta(f-a)$
Cosine wave	$\cos(2\pi at + b)$	$\frac{e^{jb}\delta(f-a)+e^{-jb}\delta(f+a)}{2}$
Delayed impulse	$\delta(t-a)$	$e^{-j2\pi fa}$
Step	$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$$

$$\sin(\phi) = \frac{1}{2j}(e^{j\phi} - e^{-j\phi})$$

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{j\phi} + e^{-j\phi})$$

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

$$\cos(\phi) = \sin(\phi - \pi/2)$$

$$\sin(\phi) = \cos(\phi + \pi/2)$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(t-\lambda)\,d\lambda = y(t) \otimes x(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \cos(2\pi k f_0 t) + \beta_k \sin(2\pi k f_0 t)\right]$$

$$x_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$\alpha_k = 2 \cdot \mathrm{Re}\{x_k\}, \quad \text{when } x(t) \in \mathbb{R}$$

$$\beta_k = -2 \cdot \mathrm{Im}\{x_k\}, \quad \text{when } x(t) \in \mathbb{R}$$

$$X(f) = \mathcal{F}\Big\{x(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\Big\{X(f)\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi kn/N}$$

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi kn/N}$$

$$f_0 = \frac{1}{N \cdot T_s} = \frac{f_s}{N}$$

$$s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$$

$$X(s) = \mathcal{L}\Big\{x(t)\Big\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}dt$$

$$d_n = \frac{u_n}{u_1}$$

$$d_{\text{tot}} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} d_n^2}$$