Tfy-44.127 Statistinen fysiikka ja termodynamiikka, tentti 26.1.1993

1. Empiirisesti on havaittu, että mustan kappaleen säteilylle ekstensiiviset suureet kuten sisäinen energia ja entropia ovat muotoa tilavuus × suureen tiheys, ja tiheydet ovat vain lämpötilan funktioita; esim. $U = Vu(T)$. Myös tiedetään, että säteilyn paine on $p = u/3$. Näytä termodynamiikkaa käyttäen, että energiatiheyden lämpötilariippuvuus on muotoa $u(T) \propto T^4$.

2. Tutkitaan yksidimensioista Ising-spinien ketjua (spinien arvot ±1), jonka vuorovaikutukset pyrkivät kääntämään vierekkäisiä spinejä vastakkaisiin suuntiin. On hyödyllistä kuvitella, että ketju koostuu kahdesta osahilasta, vuorottelevista spineistä s_i ja S_i siten, että spin S_i on spinien s_i ja s_{i+1} välissä. Hamiltonin funktio on muotoa

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\varepsilon \sum_i (s_i S_i + s_{i+1} S_i) - B\left(\sum_i s_i + \sum_i S_i\right),$$

missä $\varepsilon > 0$ on spin-spin vuorovaikutuksen kytkentäparametri ja B on magneettikenttä.

a) Johda keskimääräisen kentän aproksimaatiossa spinien odotusarvoille $s = \langle s_i \rangle$ ja $S = \langle S_i \rangle$ yhtälöt $S = \tanh[\beta(B - \varepsilon s)]$ ja $s = \tanh[\beta(B - \varepsilon S)]$.

b) Osoita (yhäti keskimääräisen kentän aproksimaatiossa), että pisteessä $B = 0$ ja $T = T_c = \varepsilon/k$ tapahtuu *antiferromagneettinen* faasitransitio, jossa vierekkäisille spineille tulee vastakkaismerkkiset odotusarvot.
HUOM: b-osan voi tehdä vaikka ei a:ta osaisikaan.

3. Relativistiselle ideaaliselle Bose-kaasulle hiukkasten dispersiorelaatio on $E_k = \hbar ck$. Osoita, että silloin $\Omega = -\frac{1}{3}U$. Mitä yhteyttä tuloksella on tehtävään 1?

4. Tutkitaan klassista N:n yksiatomisen molekyylin ideaalikaasua tilavuudessa V. Johda kanonisen joukon statistisesta mekaniikasta tuttu tilanyhtälö $pV = NkT$.

5. Mallitetaan hiukkasloukkua harmonisen oskillaattorin potentiaalilla. Loukussa liikkuva partikkeli (massa m) vuorovaikuttaa samalla termisessä tasapainossa olevan ympäristön kanssa. Kun liikettä x-suunnassa ajetaan voimalla $F(t)$, osoittautuu, että partikkeli toteuttaa liikeyhtälön $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$. Tässä ω_0 on vapaitten värähtelyjen taajuus ja $\gamma \ll \omega_0$ on liikkeen vaimennusvakio. Laske fluktuaatio-dissipaatioteoreeman avulla partikkelin paikan termisten fluktuaatioiden suuruus $S_{xx}(t=0) = \langle x^2 \rangle$ klassisella rajalla $\hbar \to 0$.
Muistin virkistystä:

$$H = H_0 - h(t)A \Rightarrow \langle B(\omega)\rangle = \chi_{BA}(\omega)\, h(\omega);\ \varepsilon_A = \varepsilon_B \Rightarrow \chi''_{AB}(\omega) = \mathrm{Im}\,[\chi_{AB}(\omega)];$$

$$\chi''_{AB}(\omega) = \frac{1}{2\hbar}\left(1 - e^{-\hbar\omega\beta}\right) S_{AB}(\omega).$$