

Tfy-44.130 Kvanttimekaniikka II

2. Välikoe ja Tentti, 19.5.1995, klo 9 - 12, sali F1

Martti Salomaa

HUOMAA:

2. VÄLIKOE = tehtävät 1, 2, 3, 4 ja 5.

TENTTI = tehtävät 6, 7, 1, 4 ja 5

Tehtävä 1: Sähkömagneettinen kenttä

Tarkastellaan miten varattu hiukkanen (varaus q , massa m) kytkeytyy ulkoiseen sähkömagneettiseen kenttään. Sähkömagneettista kenttää kuvataan vektori- ja skalaaripotentialeilla $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ja $\phi(\vec{r})$. Oletetaan, että $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ja $(\partial\phi/\partial t) = 0$ (Lorentzin mitta). Minimaalisen kytkennän sijoitus $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - q\vec{A}$, $V \rightarrow V + q\phi$ johtaa ajasta riippuvaan Schrödingerin yhtälöön

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + V + q\phi \right] \Psi.$$

Laske tätä Schrödingerin yhtälön muotoa vastaava todennäköisyysvirtatiheys \vec{j} . (Huom: yleisesti \vec{j} ei ole sama kuin alkuperäistä Schrödingerin yhtälöä vastaava todennäköisyysvirtatiheys).

Tehtävä 2: Valon sironta

Selitä lyhyesti:

- Rayleigh- ja Thomson-sironta.
- Raman-sironta (\Rightarrow Stokes ja anti-Stokes siirtymät).
- Lambin siirtymä.

Tehtävä 3: Levi-Civita tensori

Täysin antisymmetrinen Levi-Civita tensori ϵ_{ijk} määritellään siten, että $\epsilon_{ijk} = 1$, jos ijk on indeksien 1, 2 ja 3 (tai x, y ja z) parillinen permutaatio, ja $= -1$ jos permutaatio on pariton ja 0 muutoin (esim. jos kaksi indekseistä ijk on samoja).

(a) Totea seuraavat Levi-Civita tensorin ominaisuudet:

- $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$
- $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$ (syklinen invarianssi)
- $\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk'} \delta_{kj'}$
- $a_i b_j - a_j b_i = \sum_{klm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} a_l b_m$.

(b) Totea, että vektorien ristitulo voidaan määritellä $(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i b_j$.

- (c) Osoita, että vektorianalyysin kaava $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ seuraa suoraan kohdan (a) tuloksesta (iii).

Tehtävä 4: Relativistinen formalismi

Selitä lyhyesti:

- (a) Kleinin-Gordonin yhtälön rakenne ja sen merkitys.
 (b) Diracin yhtälön rakenne ja sen merkitys.
 (c) Weylin yhtälön rakenne ja sen merkitys.

Tehtävä 5: Diracin yhtälö

Ratkaise vapaan hiukkasen Diracin yhtälö yritteellä $\psi(x) = e^{-ip \cdot x} u(p)$. Normita ratkaisu siten, että $u_{1/2}(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ ja $u_{-1/2}(0) = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$ sekä $\bar{u}(p)u(p) = +1$. (Dirac-adjungoinnin määritelmä: $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0$, missä γ^0 on Diracin γ -matriisi).

Onnea välikokeeseen ...

Tehtävä 6: Atomien rakenne

Selitä: Hartree ja Hartree-Fock approksimaatioiden struktuuri ja merkitys atomien elektroniverhorakenteen laskussa.

Tehtävä 7: Toinen kvantisointi

Osoita suoraan laskemalla, että vuorovaikuttavan elektronikaasun Hamiltonin operaattori säilyttää elektronien lukumäärän: $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$, missä:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \\ \hat{H}_1 &= \sum_{k\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}, \\ \hat{H}_2 &= \frac{e^2}{2\epsilon_0 V} \sum_{\substack{kq(q \neq 0) \\ \sigma\sigma'}} \frac{1}{q^2} c_{k+q,\sigma}^\dagger c_{p-q,\sigma'}^\dagger c_{p\sigma'} c_{k\sigma}, \\ \hat{N} &= \sum_{n,\alpha} c_{n\alpha}^\dagger c_{n\alpha}. \end{aligned}$$

... ja tenttiin !!!