Tfy-44.130 Kvanttimekaniikka II

2. Välikoe ja Tentti, 19.5.1995, klo 9 - 12, sali F1

Martti Salomaa

HUOMAA:

2. VÄLIKOE = tehtävät 1, 2, 3, 4 ja 5.

TENTTI = tehtävät 6, 7, 1, 4 ja 5

Tehtävä 1: *Sähkömagneettinen kenttä*

Tarkastellaan miten varattu hiukkanen (varaus q, massa m) kytkeytyy ulkoiseen sähkömagneettiseen kenttään. Sähkömagneettista kenttää kuvataan vektori- ja skalaaripotentiaaleilla $\vec{A}(\vec{r},t)$ ja $\phi(\vec{r})$. Oletetaan, että $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ ja $(\partial\phi/\partial t)=0$ (Lorentzin mitta). Minimaalisen kytkennän sijoitus $\hat{p}\to\hat{p}-q\vec{A}$, $V\to V+q\phi$ johtaa ajasta riippuvaan Schrödingerin yhtälöön

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-q\vec{A}\right)^2+V+q\phi\right]\Psi\,.$$

Laske tätä Schrödingerin yhtälön muotoa vastaava todennäköisyysvirtatiheys $\vec{j}$. (*Huom:* yleisesti $\vec{j}$ ei ole sama kuin alkuperäistä Schrödingerin yhtälöä vastaava todennäköisyysvirtatiheys).

Tehtävä 2: *Valon sironta*

Selitä lyhyesti:

(a) Rayleigh- ja Thomson-sironta.

(b) Raman-sironta ($\Rightarrow$ Stokes ja anti-Stokes siirtymät).

(c) Lambin siirtymä.

Tehtävä 3: *Levi-Civita tensori*

Täysin antisymmetrinen Levi-Civita tensori ϵ_{ijk} määritellään siten, että $\epsilon_{ijk}=1$, jos ijk on indeksien $1,2$ ja 3 (tai x,y ja z) parillinen permutaatio, ja $=-1$ jos permutaatio on pariton ja 0 muutoin (*esim.* jos kaksi indekseistä ijk on samoja).

(a) Totea seuraavat Levi-Civita tensorin ominaisuudet:

(i) $\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}=-\epsilon_{kji}=-\epsilon_{ikj}$

(ii) $\epsilon_{ijk}=\epsilon_{jki}$ (syklinen invarianssi)

(iii) $\sum_i\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij'k'}=\delta_{jj'}\delta_{kk'}-\delta_{jk'}\delta_{kj'}$

(iv) $a_ib_j-a_jb_i=\sum_{klm}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}a_lb_m$.

(b) Totea, että vektorien ristitulo voidaan määritellä $(\vec{a}\times\vec{b})_k=\sum_{ij}\epsilon_{ijk}a_ib_j$.

(c) Osoita, että vektorianalyysin kaava $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$ seuraa suoraan kohdan (a) tuloksesta (iii).

Tehtävä 4: *Relativistinen formalismi*

Selitä lyhyesti:

(a) Kleinin-Gordonin yhtälön rakenne ja sen merkitys.

(b) Diracin yhtälön rakenne ja sen merkitys.

(c) Weylin yhtälön rakenne ja sen merkitys.

Tehtävä 5: *Diracin yhtälö*

Ratkaise vapaan hiukkasen Diracin yhtälö yritteellä $\psi(x) = e^{-ip\cdot x}u(p)$. Normita ratkaisu siten, että $u_{1/2}(0) = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ ja $u_{-1/2}(0) = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ sekä $\bar{u}(p)u(p) = +1$. (Dirac-adjungoinnin määritelmä: $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0$, missä γ^0 on Diracin γ-matriisi).

Onnea välikokeeseen ...

Tehtävä 6: *Atomien rakenne*

Selitä: Hartree ja Hartree-Fock approksimaatioiden struktuuri ja merkitys atomien elektroniverhorakenteen laskussa.

Tehtävä 7: *Toinen kvantisointi*

Osoita suoraan laskemalla, että vuorovaikuttavan elektronikaasun Hamiltonin operaattori säilyttää elektronien lukumäärän: $[\hat{H},\hat{N}] = 0$, missä:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2\,,$$

$$\hat{H}_1 = \sum_{k\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma}\,,$$

$$\hat{H}_2 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 V} \sum_{\substack{kq(q\neq 0)p \\ \sigma\sigma'}} \frac{1}{q^2} c^\dagger_{k+q,\sigma} c^\dagger_{p-q,\sigma'} c_{p\sigma'} c_{k\sigma}\,,$$

$$\hat{N} = \sum_{n,\alpha} c^\dagger_{n\alpha} c_{n\alpha}\,.$$

... ja tenttiin !!!