

## Tfy-44.130 Kvanttimekaniikka II

Tentti 24.5.1996, klo 12 alkaen: aikaa on, sali F1

Martti Salomaa

### Tehtävä 1: Sironnateoriaa

Lähtien differentiaalisen vaikutusalan osa-aaltokehityksestä:

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta) \right|^2.$$

(a) Laske  $\sigma_{\text{tot}} = \int \sigma(\theta) d\Omega$ .

(b) Laske  $f(\theta=0)$  ja lausu  $\sigma_{\text{tot}}$  sen avulla. (Vihje:  $P_\ell(1) = 1; \forall \ell$ .)

$\frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \sin^2(\delta_\ell)$

### Tehtävä 2: Spin ja monihiukkassysteemit

Osoita suoraan laskemalla, että:  $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$ , eli vuorovaikuttavan elektronikaasun Hamiltonin operaattori säilyttää elektronien lukumäärän  $\hat{N} = \sum_{n,\alpha} c_{n\alpha}^\dagger c_{n\alpha}$ , missä Hamiltonin operaattori on:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I,$$

$$\hat{H}_0 = \sum_{k\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma},$$

$$\hat{H}_I = \frac{e^2}{2\epsilon_0 V} \sum_{\substack{kq(q \neq 0) \\ \sigma\sigma'}} \frac{1}{q^2} c_{k+q,\sigma}^\dagger c_{p-q,\sigma'}^\dagger c_{p\sigma'} c_{k\sigma}.$$

$F^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

### Tehtävä 3: Kleinin-Gordonin ja Diracin yhtälöt

(a) Kleinin-Gordonin (KG) yhtälön rakenne ja KG-yhtälön merkitys.

(b) Diracin yhtälön (DY) rakenne ja DY:n merkitys.

$(\alpha \cdot p + \beta mc^2) \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

### Tehtävä 4: Toinen kvantisointi

Tarkastellaan elektronien tilavektoria, joka on muotoa

$$|\Psi_k\rangle = (u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle,$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

missä  $k$  viittaa impulssitilaan ja nuolet elektronin spiniin. "Koherenssitekijät"  $u_k$  ja  $v_k$  voidaan valita reaalisiksi; yllä  $c_{k\uparrow}^\dagger$  ja  $c_{-k\downarrow}^\dagger$  ovat elektronien luomisoperaattoreita.

(a) Näytä, että tila on normitettu, jos  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ .

(b) Ilmeisesti on kysymys nollan ja kahden elektronin tilojen superpositiosta. Laske hiukkaslukumääräoperaattorin odotusarvo tässä tilassa.

(c) Olkoon

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_k |\Psi_k\rangle.$$

Mikä on hiukkaslukumäärän odotusarvo tässä tilassa?

(d) Osoita, että edellä määritelty BCS-teorian mukainen Cooperin parien perustila  $|\Psi_k\rangle$  on Bogoliubovin muunnoksella

$$\alpha_{k\uparrow} = u_k c_{k\uparrow} - v_k c_{-k\downarrow}^\dagger$$

$$\alpha_{-k\downarrow}^\dagger = u_k c_{-k\downarrow}^\dagger + v_k c_{k\uparrow}$$

määriteltyjen operaattoreiden  $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$  perustila, eli

$$\alpha_{k\uparrow} |\Psi_k\rangle = 0.$$

(e) Osoita kanoniset antikommutaatiorelaatiot:  $\{\alpha_k, \alpha_l^\dagger\} = \delta_{kl}$  ja  $\{\alpha_{-k}, \alpha_{-l}^\dagger\} = \delta_{kl}$ .

**Tehtävä 5:** Sähkömagneettisen kentän ja aineen vuorovaikutus

(a) Rayleigh-, Thomson-, ja Compton-sironta (lyhyesti).

(b) Sähkömagneettisen kentän kvantisointi: periaate.

(c) Vakuumifluktuaatioiden Feynmanin graafi toisessa kertaluvussa?

$$\frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega)^2}$$



Onnea tenttiin !!!

$$\frac{J_s}{kg \frac{m}{s}}$$

$$kg \frac{m}{s^2} \cdot m$$

$$kg \frac{m^2}{s^2} \cdot m \cdot s = kg \frac{m^3}{s}$$

$$kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

$$(\mu - v)^2 = 1 - 2\mu v$$