

Tentti 1996-05-13 klo 9-13

Kirjoita HETI jokaiseen koepaperiin seuraavaa (eri riveille):

- 1) Opintojakson nimi, päiväys.
- 2) Opiskelijanumero + kirjain. TEKSTATEN: Sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet.
- 3) Koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu).
- 4) Mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat.
- 5) Nimikirjoitus.

1. Olkoon annettuna pisteet $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,2)$ ja $(4,4)$. Muodosta ko. pisteistön kautta interpolaatiopolynomi
- a) käyttäen Lagrangen interpolaatiokaavaa (ts. käyttäen Lagrangen interpolaatiopolynomeja $L_k(x)$).
 - b) Newtonin jaettujen erotusten menettelyllä.
 - c) Oletetaan tunnetuksi, että Newtonin menetelmä tuottaa polynomin, joka kulkee datapisteiden kautta. Miten tätä voidaan käyttää hyväksi, jos haluamme osoittaa että a) ja b) kohtien polynomit ovat samat (sieventämättä)?

2. Laske integraali $\int_0^1 \frac{(\cos x - 1)/x}{\cos x} dx$ tarkkuudella 0.000 001. Käytä Taylorin kaavaa.

3. a) Integroi Simpsonin kaavalla $\int_0^{1/2} \exp(x^2) dx$ askelpituutena $h = 0.05$.
b) Virheelle on kaava

$$|\text{virhe}| \leq \frac{h^4}{180} \cdot (b-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Kuinka pieni askelpituus olisi valittava, jotta varmasti $|\text{virhe}| < 0.0001$.

4. a) Ratkaise Gaussin eliminaatiolla yhtälöryhmä

$$a + b + c + d = 2$$

$$b + 3c + 3d = -1$$

$$2a + b - 2c + 4d = 0$$

$$-3a + 3b + c + 2d = 1$$

- b) Muodosta edellisen yhtälöryhmän matriisin LU - hajotelma (faktorisaatio).

5. a) Kirjoita Eulerin menetelmä yhtälölle $y' + 2y^2 = 1/(1+x^2)$, $y(0) = 0$ askelpituutena $h = 0.1$. Laske $y(n)$, $n = 1, 2, \dots, 10$.
b) Arvioi virhettä $Y(1) - y_h(1)$, kun tiedämme, että

$$Y(x) = x/(1+x^2)$$

$$|Y(x_n) - y_h(x_n)| \leq e^{(b-x_0)K} |Y(x_0) - y_0| + h \cdot \frac{e^{(b-x_0)K} - 1}{2K} \cdot \max_{x \in I} |Y''(x)|,$$

$$\text{jossa } K = 2 \cdot \sup_{x \in I} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y(x)) \right| \text{ ja } I = [x_0, b].$$