

Ratkaisuissa on esitettävä riittävät välivaiheita, jotta laskujen kulku voidaan arvostelussa selvittää. Laskimissa mahdollisesti olevia matriisilaskennan, Laplace-muunnoksen ja differentiaaliyhtälöiden ohjelmia ei saa käyttää.

Tentissä saa olla mukana kirja: Virkkunen, Säätiötekniikan matematiikka. 10 tehtävää.

1. Olkoon matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Laske

- $B^T A$
- C^{-1}
- C :n ominaisarvot

2. Matriiseissa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

a ja b ovat reaaliarvoisia vakiolta.

- Laske AB ja BA .
- Millä parametrien arvoilla käänteismatriisit $(AB)^{-1}$ ja $(BA)^{-1}$ ovat olemassa? Laske käänteismatriisit tällöin.

3. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Laske e^{Au} , e^{Bu} ja e^{Cu} .

4. Laplace-muunna

- $f(t) = (t+1)(t+2) + \sin(4t)$
- $f(t) = 2te^{-2t}$

5. Käänteismuunna

- $\frac{6}{2s+3}$
- $\frac{2}{(s-1)(s^2+1)}$

6. Käyttämällä Laplace-muunnostekniikkaa ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$y'(t) + y(t) = 2e^t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

7. Tutkitaan diskreettiä systeemiä

$$y(k+2) - 1.3y(k+1) + 0.4y(k) = u(k+1) - 0.4u(k)$$

Määritä systeemin a. tilaesitys, b. pulssiinsiirtofunktio, c. navat ja nollat. Onko systeemi stabiili?

8. Tutkitaan tilaesityksenä annettua yksimuuttujajärjestelmää

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases}$$

jossa siis tilamuuttuja x ja lähtömuuttuja y ovat yksidimensioisia ja parametrit a , b ja c skalaareja. Määritä vastaava diskreettiäikainen esitys, kun oletetaan nollainen kertaluvun pito, ja diskretointiväli on T .

9. Tutkitaan epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1^2(t)x_2(t) - 1 \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ y(t) = x_1^2(t) \end{cases}$$

- Määritä systeemin kaikki tasapainopisteet.
- Linearisoi systeemi tasapainopisteen $x_1 = 0.5$, $x_2 = 2$, $u = 0$ ympäristössä. Esitä tulokset standardiesitysmuodossa (lineaarinen tilaesitys).

10. a. Etsi kaikki sellaiset matriisit B , jotka kommutoivat matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

kanssa (siis $AB=BA$).

- Sievennä lauseke $(A+B)^2 - (B-A)^2 - 4AB$, kun A ja B ovat a-kohdan mukaisia matriiseja.

Da F.