Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Hermelin

Mat-1.401 Peruskurssi L1

Välikoe 2 8.11.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Tason vektoriavaruuden V kannasta $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ tiedetään, että $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$. Vektoreista $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ tiedetään, että $\vec{u}$ on vektorin $2\vec{a} - \vec{b}$ suuntainen, $\vec{u} \perp \vec{v}$ ja $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$. Laske $\vec{u}$:n ja $\vec{v}$:n koordinaatit kannassa $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

2. a) Lähtien kaavasta $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ näytä, että

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

   b) Määritä kaikki kompleksiluvut $z = x + iy$, joilla pätee $x > 0, y > 0$ ja $z^6 = 64i$. Laske x ja y tarkkoina geometrisina lukuina.

3. Pisteen P pallokoordinaatit ovat $(r, \theta, \varphi) = (2, 120^o, 135^o)$. a) Määritä P:n lieriökoordinaatit (r, φ, z). b) Laske vektorin $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ esitysmuoto koordinaatistossa $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ (lieriökoordinaatisto).

4. Olkoon $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{c} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ kolme avaruusvektoria ja tarkastellaan parametrista avaruuskäyrää $\vec{r}(t) = \vec{a} + (\cos t)\vec{b} + \alpha(\sin t)\vec{c}$, $t \in \mathbb{R}$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$ on vakio, $\alpha \neq 0$. a) Kyseessä on eräällä avaruustasolla T sijaitsevan käyrän S parametrisaatio. Mikä on T:n yhtälö normaalimuodossa? b) Päättele, että eräillä α:n arvoilla S on avaruusympyrä. Millä arvoilla?

Svensk text

1. Man vet om basen $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ för det plana vektorrummet V att $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ och $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$. Om vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ vet man att $\vec{u}$ är parallell med vektorn $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ och $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$. Beräkna $\vec{u}$:s och $\vec{v}$:s koordinater i basen $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

2. a) Visa utgående från formeln $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ att

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

   b) Bestäm alla komplexa tal $z = x + iy$, för vilka gäller att $x > 0, y > 0$ och $z^6 = 64i$. Beräkna x och y exakt som geometriska tal.

3. Punkten P har sfäriska koordinaterna $(r, \theta, \varphi) = (2, 120^o, 135^o)$. a) Bestäm P:s cylindriska koordinater (r, φ, z). b) Beräkna hur vektorn $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ges i koordinatsystemet $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ (cylindriska koordinater).

4. Låt $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ och $\vec{c} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ vara tre vektorer i rummet. Vi studerar den parametriserade rymdkurvan $\vec{r}(t) = \vec{a} + (\cos t)\vec{b} + \alpha(\sin t)\vec{c}$, $t \in \mathbb{R}$, där $\alpha \in \mathbb{R}$ är en konstant, $\alpha \neq 0$. a) Det rör sig om en parametrisering av en kurva S, som befinner sig i ett plan T i rummet. Var är T:s ekvation på normalform? b) Visa att för ett visst värde på α är S en cirkel i rummet. För vilket värde?