Mat-5.113 Dynamiikka II, tentti 26.3.1991

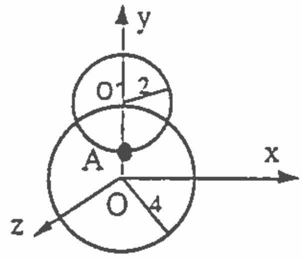
1. Kiekko pyörii kuvan z-akselin ympäri. Kiekon reunaan pisteeseen O´ on kiinnitetty pienempi kiekko, joka pyörii ao. pisteen kautta kulkevan z-akselin suuntaisen suoran ympäri. Suuren kiekon kulmanopeus ja -kiihtyvyys ovat

$$\bar{\omega}_0 = 5\bar{k} \text{ ja } \bar{\alpha}_0 = -2\bar{k}.$$

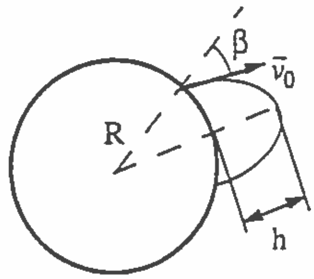
Pienen kiekon kulmakiihtyvyys on $\bar{\alpha}_0 = 4\bar{k}$.

Pienen kiekon kulmanopeus suuren suhteen on $\bar{\omega}_{OO'} = -8\bar{k}$.

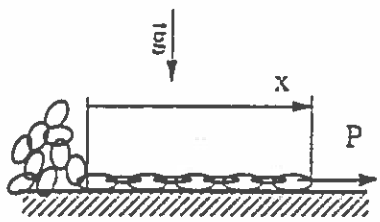
Määritä kuvan tilanteessa pienen kiekon pisteen A nopeus ja kiihtyvyys. Käytetyt yksiköt [m, s, rad].



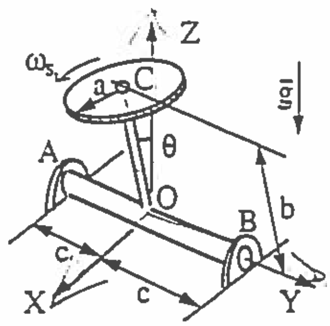
2. Raketti ammutaan maan pinnalta alkunopeudella $v_0 = \sqrt{KM/R}$. Mikä pitää lähtösuunnan β olla, jotta raketin lentoradan suurin korkeus maan pinnasta olisi h = R/2? Ei ilmanvastusta.



3. Oheisen kuvan esittämä kasassa oleva pienistä renkaista muodostuva ketju purkautuu suoraksi ketjun päähän vaikuttavan vakioarvoisen voiman P johdosta. Määritä ketjun pään kiihtyvyyden $a = \ddot{x}$ lauseke. Ketjun massa pituutta kohti on vakio ρ ja kitkakerroin alustan suhteen μ. Otaksutaan, että ketju purkautuu siten, että välittömästi kohdan x = 0 vasemmalla puolella ketjussa vallitseva voima on nolla. (Huomautettakoon, että renkaista muodostuvan ketjun purkautuessa ketju ei käyttäydy konservatiivisesti. Älä siis käytä energiaperiaatetta!)



4. Oheisen kuvan esittämä ohut homogeeninen ympyrälevy (massa = m) pyörii vapaasti tukien A ja B (vaakatasossa X,Y) varaan laakeroidun ⊥-muotoisen sauvarakenteen COAB akselin OC (pystytasossa Z,X) ympäri vakiokulmavauhdilla ω_s. Sauvarakenne otaksutaan massattomaksi ja laakerit A, B ja C kitkattomiksi. Systeemi lähtee liikkeelle painovoiman alaisena poikkeutettuna hieman pystyasennosta θ = 0. Tarkastele levyn liikettä kiinteän pisteen O ympäri ja

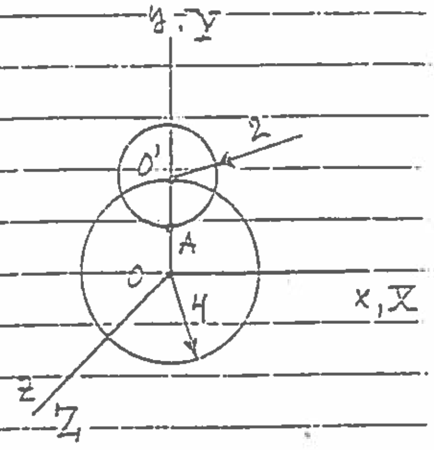


1

TIEDETÄÄN SIIS, ETTÄ $\qquad$ yksiköt [m, s, rad]

$\bar{\omega}_0 = 5\bar{k}$, $\bar{\alpha}_0 = -2\bar{k}$, $\bar{\alpha}_{0'} = 4\bar{k}$,

$\bar{\omega}_{00'} = -8\bar{k}$.



PIENEN KIEKON KULMANOPEUS ON

$$\bar{\omega}_{0'} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{00'}$$

$$= 5\bar{k} - 8\bar{k} = -3\bar{k}$$

PISTEEN 0' NOPEUS JA KIIHTYVYYS OVAT $\qquad$ (3.3.6)

$$\bar{v}_{0'} = \bar{\omega}_0 \times \bar{\rho}_{00'} = 5\bar{k} \times (4\bar{j}) = -20\bar{i}$$

$$\bar{a}_{0'} = \bar{\alpha}_0 \times \bar{\rho}_{00'} + \bar{\omega}_0 \times (\bar{\omega}_0 \times \bar{\rho}_{00'})$$

$$= -2\bar{k} \times 4\bar{j} + 5\bar{k} \times (5\bar{k} \times 4\bar{j})$$

$$= 8\bar{i} + 5\bar{k} \times (-20\bar{i}) = 8\bar{i} - 100\bar{j}.$$

EDELLEEN KAAVOILLA (3.3.6) SAADAAN PISTEELLE A

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{0'} + \bar{\omega}_{0'} \times \bar{\rho}_{0'A} = -20\bar{i} + (-3\bar{k}) \times (-2\bar{j})$$

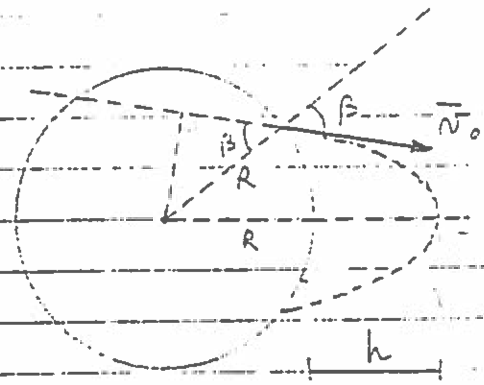
$$= -20\bar{i} - 6\bar{i} = -26\bar{i} \quad (m/s)$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{0'} + \bar{\alpha}_{0'} \times \bar{\rho}_{0'A} + \bar{\omega}_{0'} \times (\bar{\omega}_{0'} \times \bar{\rho}_{0'A})$$

$$= 8\bar{i} - 100\bar{j} + 4\bar{k} \times (-2\bar{j}) + (-3\bar{k}) \times (-6\bar{i})$$

$$= 8\bar{i} - 100\bar{j} + 8\bar{i} + 18\bar{j} = 16\bar{i} - 82\bar{j} \quad (m/s^2)$$

2.



MERKITÄÄN: RAKETIN NOPEUS KORKEUDELLA h ON v_1.

$$h = R/2 \qquad (1)$$

$$v_0 = \sqrt{KM/R} \qquad (2)$$

KULMALIIKEMÄÄRÄ MAAN KESKIPISTEEN SUHTEEN SÄILYY, JOTEN

$$m v_0 R \sin\beta = m v_1 (h+R) \overset{(1)}{=} m v_1 \cdot \frac{3}{2} R$$

$$\Rightarrow v_0 \sin\beta = \frac{3}{2} v_1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \underline{v_1 = \frac{2}{3}\sqrt{KM/R}\,\sin\beta} \qquad (3)$$

MEK. ENERGIA SÄILYY, ELI

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad \left[V = -k\frac{mM}{r} \quad (5.2.25) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - k\frac{mM}{R} = \frac{1}{2} m v_1^2 - k\frac{mM}{3R/2}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\frac{K\cancel{M}}{\cancel{R}} - \frac{K\cancel{M}}{\cancel{R}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\frac{K\cancel{M}}{\cancel{R}}\sin^2\beta - \frac{2}{3}\frac{K\cancel{M}}{\cancel{R}} \quad \Big| \cdot \frac{9}{2}$$

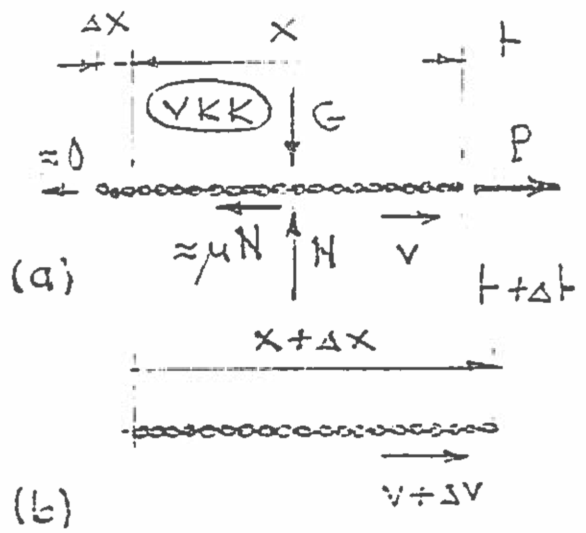
$$\Leftrightarrow \sin^2\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \beta = 60^\circ$$

HUOM! RATA EI OLE PARAABELI, SILLÄ EI OLLA HOMOGEENISESSA PAINOVOIMAKENTÄSSÄ (ELI $g \neq$ VAKIO).

3.



Kuvan (a) esittämä suljettu systeemi on valittu siten, että

$$\Delta x = v\Delta t, \qquad (1)$$

jossa $v = \dot{x}$. Koska systeemin massakeskiön kiihtyvyys pystysuunnassa ≈ nolla, voima

$$N = G = \varrho(x+\Delta x)g. \qquad (2)$$

Täten systeemiin vaakasuunnassa hetkellä t vaikuttava voima

$$F \approx P - \mu N = P - \mu\varrho(x+\underbrace{\cancel{\Delta x}}_{0})g \qquad (3)$$

ja impulssi välillä $(t, t+\Delta t)$

$$I \approx F\Delta t = (P - \mu\varrho x g)\Delta t. \qquad (4)$$

Systeemin liikemäärät hetkillä t ja $t+\Delta t$ ovat

$$p(t) = \varrho x v \qquad (5)$$

ja

$$\begin{aligned} p(t+\Delta t) &= \varrho(x+\Delta x)(v+\Delta v) \\ &= \varrho x v + \varrho x\Delta v + \varrho\Delta x v + \varrho\Delta x\Delta v \\ &= \varrho x v + \varrho x\Delta v + \varrho v^2\Delta t + \varrho v\underbrace{\cancel{\Delta t\Delta v}}_{0}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Liikemäärän muutos

$$\Delta p = \varrho x\Delta v + \varrho v^2\Delta t. \qquad (7)$$

Impulssin periaate $I = \Delta p$ antaa yhtälön

$$(P - \mu \rho g x)\Delta t = \rho x \Delta v + \rho v^2 \Delta t \qquad (8)$$

eli jakamalla suureella Δt ja kun $\Delta t \to 0$

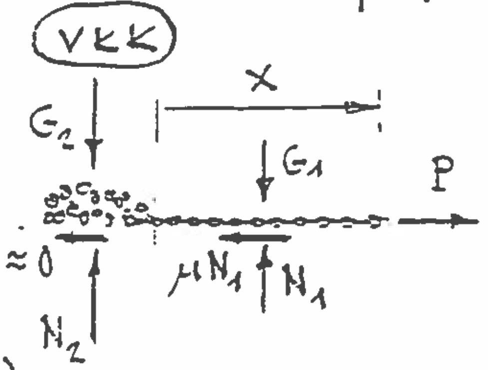
$$P - \mu \rho g x = \rho x a + \rho v^2. \qquad (9)$$

Täten kiihtyvyyden lauseke

$$a = \frac{P}{\rho x} - \mu g - \frac{v^2}{x}. \qquad (10)$$

On huomattava, että laskelmissa käytettyjen likimääräistysten — kuten korkeampaa kertalukua olevien pienten suureiden poisjättö alempaa kertalukua olevien rinnalla — ei aiheuta virheitä, kun $\Delta t \to 0$.

Vaihtoehtoinen, lyhyempi ratkaisu saadaan ottamalla systeemiksi kuvan (c) esittämään tapaan koko ketju. Systeemiin vaakasuunnassa vaikuttava voima on edelleen kaavan (3) mukainen:



(c)

$$F = P - \mu \rho x g. \qquad (11)$$

Systeemin liikemäärä vaakasuunnassa

$$p = \rho x v \qquad (12)$$

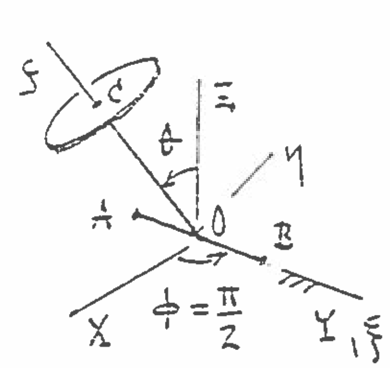
ja liikemäärän periaate $F = \dot{p}$ antaa

$$P - \mu \rho x g = \frac{d}{dt}(\rho x v) = \rho x a + \rho v^2. \qquad (13)$$

Saatiin kaava (9) ja jatko kuten edellä.

4

a)

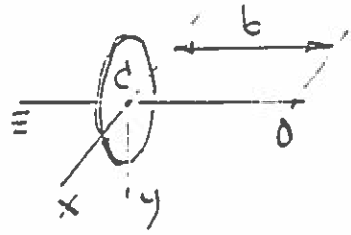


(a)

OC on levyn symmetria-akseli, joten asetetaan ζ-akseli yhtymään siihen. Solmuviiva eli ξ-akseli yhtyy koko ajan Y-akseliin. Täten

$$\left.\begin{aligned} &\phi = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\phi} = 0, \quad \ddot{\phi} = 0, \\ &\dot{\psi} = \omega_s, \quad \ddot{\psi} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

b) Taulukon L.3.1 mukaan



(b)

$$\left.\begin{aligned} I_{zz} &= \frac{1}{2} m a^2, \\ I_{xx} &= \frac{1}{12} m (3a^2 + 0) \\ &= \frac{1}{4} m a^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

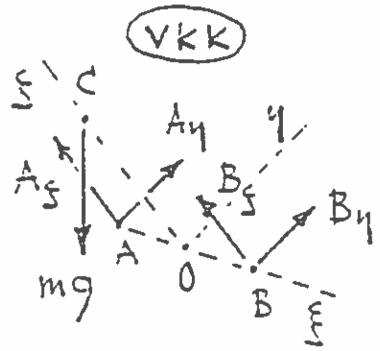
Täten

$$I = \frac{1}{2} m a^2 \qquad (3)$$

ja Steinerin säännön perusteella

$$I_0 = \frac{1}{4} m a^2 + m b^2 = m\left(\frac{1}{4} a^2 + b^2\right). \qquad (4)$$

c)



(c)

Vapaakappalekuvion c) avulla saadaan pisteen O suhteen momenttikomponentit

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= mg \sin\theta, \\ M_\eta &= (A_\zeta - B_\zeta)c, \\ M_\zeta &= (B_\eta - A_\eta)c \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ja voimakomponentit

$$
\left.\begin{aligned}
F_\xi &= 0, \\
F_\eta &= -mg\sin\vartheta + A_\eta + B_\eta, \\
F_\zeta &= -mg\cos\vartheta + A_\zeta + B_\zeta.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)
$$

Rotaation liikeyhtälöt (7.2.36) ovat siis

$$
\left.\begin{aligned}
mg\sin\vartheta &= I_0\ddot{\vartheta}, \\
(A_\zeta - B_\zeta)c &= -I\dot{\vartheta}\omega_s, \\
(B_\eta - A_\eta)c &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (7)
$$

ja koska massakeskiö suorittaa ympyräliikettä, translaation liikeyhtälöt ovat

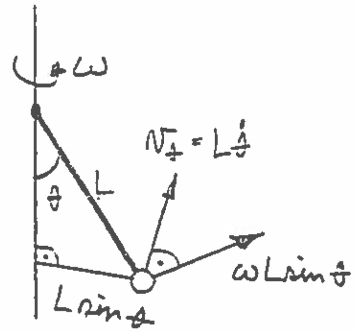
$$
\left.\begin{aligned}
0 &= 0, \\
-mg\sin\vartheta + A_\eta + B_\eta &= -mb\ddot{\vartheta}, \\
-mg\cos\vartheta + A_\zeta + B_\zeta &= -mb\dot{\vartheta}^2
\end{aligned}\right\} \qquad (8)
$$

Huomautus. Itse asiassa levyyn sauvarakenteen kautta vaikuttavat voimat kertyvät laakerissa C vaikuttavista kosketusvoimista, jotka voidaan redusoida (esimerkiksi) pisteen O suhteen redusoimistulokseksi $\vec{F}_k$, $\vec{M}_k$. Sauvarakenteeseen kohdistuu täten laakerin C kautta kaavojen (4.1.5) mukaisesti pisteen O suhteen redusoimistulos $-\vec{F}_k$, $-\vec{M}_k$. Koska sauvarakenne otaksutaan massattomaksi, sen liikeyhtälöt ovat tasapainoyhtälöitä ja siis vaikuttavien voimien tulee muodostaa nollavoimasysteemi. Täten siis laakereista A ja B kertyykin redusoimistulos $\vec{F}_k$, $\vec{M}_k$ ja voidaan soveltaa ilman virhettä kuvan (c) vapaakappalekuvista.

VALITAAN YLEISTETYKSI KOORDINAATIKSI KULMA ϑ.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[(L\dot{\vartheta})^2 + (\omega L \sin\vartheta)^2 \right]$$

$$V = - mgL\cos\vartheta$$



$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m \left[(L\dot{\vartheta})^2 + (\omega L \sin\vartheta)^2 \right] + mgL\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\cancel{2}} m\omega^2 L^2 \cdot \cancel{2} \sin\vartheta\cos\vartheta - mgL\sin\vartheta$$

$$= mL\sin\vartheta\,(\omega^2 L\cos\vartheta - g)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mL^2\dot{\vartheta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = mL^2\ddot{\vartheta}$$

LAGRANGEN YHTÄLÖ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad mL^2\ddot{\vartheta} - mL\sin\vartheta\,(\omega^2 L\cos\vartheta - g) = 0 \qquad \Big| : mL^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{L} - \omega^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta = 0 .$$

JOS ~~HEILAHTELUT~~ OVAT PIENIÄ, $\sin\vartheta \approx \vartheta$ JA $\cos\vartheta \approx 1$ JA LIIKEYHTÄLÖ SAADAAN MUOTOON

$$\ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{L} - \omega^2\right)\vartheta = 0 .$$

SIISPÄ $\quad \omega_m = \sqrt{\frac{g}{L} - \omega^2}$