MS-A0001 - Matriisilaskenta (TFM) Hannukainen

Tentti 5.9.2016

Funktiolaskin sallittu. Ei apuvälineitä. Koeaika on 3 tuntia

1. Olkoon $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sisätulo ja $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$ siten, että
$$\langle q_1, q_1 \rangle = 1 \quad \langle q_2, q_2 \rangle = 2 \quad \langle q_1, q_2 \rangle = 1.$$
   (a) Näytä että q_1 ja q_2 ovat lineaarisesti riippumattomia
   (b) Laske vektorin $q_1 + 2q_2$ pituus sisätulon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - määrittämässä normissa
   (c) Oletetaan lisäksi, että
$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja } q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   Näytä, että tällöin pätee
$$\langle x, y \rangle = x^T y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$
   Vihje : jokaiselle $x \in \mathbb{R}^2$ pätee $x = (x_1 - x_2)q_1 + x_2 q_2$.

2. Tarkastellaan seuraavia lineaarikuvauksia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} f_1 &= \text{ Koordinaatiston kierto 45 astetta vastapäivään} \\ f_2 &= \text{ Koordinaatiston peilaus suoran } y = x \text{ suhteen} \end{aligned}$$
   (a) Esitä lineaarikuvaukset f_1 ja f_2 matriisimuodossa.
   (b) Olkoot g_1 ja g_2 lineaarikuvauksia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Näytä, että yhdistetty kuvaus $g_1 \circ g_2$ on lineaarikuvaus.
   (c) Määritä kuvaukset f_1^{-1}, f_2^{-1} ja $f_1 \circ f_2$.

3. Olkoot
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$
   (a) Muodosta matriisin A nolla-avaruus.
   (b) Etsi kaikki $x \in \mathbb{R}^3$ siten, että $Ax = b$

4. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$,
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{bmatrix} B - \alpha I & \\ & \beta \end{bmatrix}.$$
   (a) Määritä matriisien A ja B ominaisarvohajotelmat.
   (b) Millä paramertin α arvoilla matriisilla A on olemassa käänteismatriisi ?
   (c) Määritä A^{-1}