

A!**MS-A0004 Matriisilaskenta****Tentti, 5.9.2016 klo 13.00–16.00****Aalto-yliopisto**

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: Tarkastellaan yhtälöä $z^3 = -8$, $z \in \mathbb{C}$.

- a) Osoita, että $z = 1 - i\sqrt{3}$ toteuttaa yhtälön. (2 p.)
- b) Etsi muut kaksi ratkaisua. (4 p.)

Mahdollisesti hyödyllisiä trigonometrinen funktioiden arvoja:

φ	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$
0	0	1	0
$\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$5\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	-

Tehtävä 2: a) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiolla. Mitä saamasi vastaus kertoo yhtälöiden määrittämien tasojen sijainnista avaruudessa? (3p.)

b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$$

Voidaanko vektori $[1, 2, -1]^T$ antaa vektorien $[1, 1, 3]^T$, $[1, 2, 5]^T$ ja $[1, 4, 9]^T$ lineaarikombinaationa? Perustele vastauksesi. (3p.)

Tehtävä 3: Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Laske matriisi $B = A^T A$ ja diagonalisoi se. (3p.)
- b) Muodosta matriisille A singulaariarvohajotelma? (3p.)

Tehtävä 4: a) Etsi determinantin avulla ne vakiot $c \in \mathbb{R}$, joilla matriisi

$$C = \begin{bmatrix} c & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

on kääntyvä. (3p.)

- b) Mitä tarkoitetaan ominisarvon algebrallisella ja geometrisella kertaluvulla? Kuinka niiden avulla voi päätellä, onko matriisi diagonalisoituva? (3 p.)