Aalto-yliopisto

MS-A0004 Matriisilaskenta

Tentti, 29.05.2019 klo 16.30-19.30

Vastaa kaikkiin tehtäviin.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: Tarkastellaan yhtälöä $z^3 = 8$, missä $z \in \mathbb{C}$.

a) Osoita, että $z = -1 + i\sqrt{3}$ toteuttaa yhtälön. *(2 p.)*

b) Etsi muut kaksi ratkaisua. *(4 p.)*

Mahdollisesti hyödyllisiä trigonometristen funktioiden arvoja:

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0	0	1	0
$\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$5\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	$-$

Tehtävä 2:

a) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiolla. *(4p.)*

b) Piste $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ toteuttaa

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 15. \end{cases}$$

Onko se kyseisen yhtälöryhmän yksikäsitteinen ratkaisu? Perustele vastauksesi. *(2p.)*

Tehtävä 3: Lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaa yksikköneliön kärkipisteet $a = (0,0)$, $b = (1,0)$, $c = (1,1)$ ja $d = (0,1)$ pisteiksi $f(a) = (0,0)$, $f(b) = (-1,2)$, $f(c) = (0,-1)$ ja $f(d) = (1,-3)$.

a) Etsi lineaarikuvausta f vastaava matriisi $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolle siis $f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$ kaikilla $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2$. *(2 p.)*

b) Laske edellä saamasi matriisin A käänteismatriisi. *(2 p.)*

c) Minkä pisteen f kuvaa pisteeksi $(1,1)$? *(2 p.)*

Tehtävä 4: a) Etsi determinantin avulla ne vakion $a \in \mathbb{R}$ arvot, joilla matriisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

on kääntyvä. *(3 p.)*

b) Olkoon B sellainen matriisi, että $B^3 = B$. Mitkä luvut voivat olla B:n ominaisarvoina? Miksi? *(3 p.)*

Tehtävä 5: Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit sekä ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut. Voiko A:n diagonalisoida? Jos voi, niin diagonalisoi se!