

Tentti (5.9.2016 klo 13–16)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Kolmannen asteen polynomi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ saa arvot

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 0 \quad \text{ja} \quad f(-2) = -6.$$

Tässä siis $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Kirjoita matriisiyhtälö, josta ratkaiset vakiot a, b, c, d Gauss-eliminaatiolla.

2. Olkoon $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ ja $[B] = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -3 & 8 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Laske matriisien kertolasku $[A][B]$.

b) Laske käänteismatriisi $[B]^{-1}$.

(Vihje: a-kohdan tuloksesta voi nopeasti päätellä käänteismatriisin. Tätä vihjettä ei tietenkään ole pakko käyttää.)

3. Havaitaan, että $AS = SD$, kun

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} a & -b & -c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Olkoon $a \neq 0$. Millä arvoilla $b, c \in \mathbb{C}$ on A diagonalisoituva? Perustele!

b) Olkoon $a = 0$. Millä arvoilla $b, c \in \mathbb{C}$ on A diagonalisoituva? Perustele!

4. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$ reaalin singulariarvoajoitelma (SVD).

Toisin sanoen etsi matriisit $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, joille $A = U\Sigma V^*$,

missä U, V ovat ortogonaalisia (unitaarisia) ja

Σ on singulariarvojen diagonaalimatriisi.

Tarkista, että $A = U\Sigma V^*$.