MS-A0008 Matriisilaskenta, kevät 2016
Välikoe 2, 7.4.2016 klo 9-12

Till TF:s tentamens-arkiv. Hälsn. Georg

Metsalo/Quach, Mallasto

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja

Tehtävä 1. Olkoon $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Laske symmetrisen matriisin MM^T determinantti $det(MM^T)$. (3p.)
b) Laske symmetrisen matriisin M^TM determinantti $det(M^TM)$. (3p.)

Tehtävä 2. Olkoon taas $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Määritä matriisin M^TM ominaisarvot ja jokaiselle ominaisarvolle jokin siihen liittyvä ominaisvektori. (Määritelmän mukaan nollavektori ei ole ominaisvektori.) (6p.)

Tehtävä 3.

Differentiaaliyhtälösysteemin $\begin{cases} y_1'(t) = & y_1(t) - 6y_2(t); \quad y_1(0) = 2 \\ y_2'(t) = & y_1(t) - 4y_2(t); \quad y_2(0) = 1 \end{cases}$ voi kirjoittaa muotoon

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot Y(t) = A \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}; \; Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Määritä tämän differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisu laskemalla e^{At} (voit halutessasi tarkista, että $e^{A0} = I$ ja että $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A \cdot e^{At}$) ja sen avulla $Y(t) = e^{At} \cdot Y(0)$.
(Voit halutessasi tarkista jälkeenpäin sijoittamalla vastaus systeemiin.) (6p.)

Tehtävä 4. a) Olkoon B säännöllinen $n \times n$-matriisi, eli matriisi, jolla on käänteismatriisi B^{-1}. Osoita että $det(B^{-1}) = (det(B))^{-1}$. Selitä mitä matriisioperaatioiden ominaisuuksia käytit todistuksessasi ja missä vaiheessa käytit niitä. (3p.)
b) Olkoon C $n \times n$-matriisi ja λ eräs sen ominaisarvo. Osoita että λ^2 on eräs matriisin C^2 ominaisarvo ja että λ^3 on eräs matriisin C^3 ominaisarvo. Selitä taas. (3p.)

Tänään on vastaanotto huonessa Y333 klo 12-12:30, jos on kysymyksiä koskien välikoetta. G.M.