MS-A0008 Matriisilaskenta, kevät 2016 Metsalo
Tentti, 5.9.16 klo 13-16

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja

Tehtävä 1. Laske a) $det(-UV^T)$ ja b) $det(2U^TV)$ (3+3p.), kun $U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ja $V = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Tehtävä 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ a) Laske $inv(A) = A^{-1}$. (3p.)
b) Ratkaise $A\mathbf{x} = [3, 3, 1]^T$. (3p.)

Tehtävä 3. a) Olkoot $z = x + iy$ ja $w = u + iv$ kompleksilukuja ($x, y, u, v \in \mathbf{R}$).
Osoita, että kompleksikonjugaatille pätee että $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. (2p.)
b) Olkoot $\mathbf{a} = [-1, 2, -2]^T$ ja $\mathbf{b} = [-2, 1, 3]^T$. Määritä matriisi C sellainen että $C\mathbf{x} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}$, kun $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. (4p.)

Tehtävä 4.

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot Y(t) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}; \quad Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaise yllä oleva differentiaaliyhtälösysteemi kirjoittamalla ratkaisu muotoon $Y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = c_1e^{\lambda_1 t}X_1 + c_2e^{\lambda_2 t}X_2$, missä λ_j ovat ominaisarvot ja X_j niihin liittyvät ominaisvektorit. (Voit halutessasi tarkistaa jälkeenpäin sijoittamalla vastaus systeemiin.) (6p.)

Tehtävä 5. a) Olkoon A säännöllinen $n \times n$-matriisi, eli matriisi, jolla on käänteismatriisi A^{-1}, joka toteuttaa ehdot $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Osoita että silloin myös A:n transpoosi A^T on säännöllinen osoittamalla että $(A^{-1})^T$ on sen käänteismatriisi, eli että $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Selitä mitä matriisioperaatioiden ominaisuuksia käytit todistuksessasi ja missä vaiheessa käytit niitä. (3p.)
b) Olkoot A ja B säännöllisiä $n \times n$-matriiseja. Osoita että silloin myös AB on säännöllinen osoittamalla että $B^{-1}A^{-1}$ on sen käänteismatriisi, eli että $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. Selitä taas. (3p.)