

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 2 & -7 & 6 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

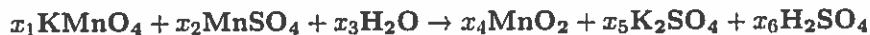
- a) Laske matriisin A determinantti. (1p.)
b) \mathbf{x} on eräs matriisin A ominaisvektori. Määritä ominaisarvo, johon se liittyy. (1p.)
c) Laske matriisin A muut ominaisarvot ja jokaiseen ominaisarvoon joku konkreettinen siihen liittyvä ominaisvektori. (Määritelmän mukaan nollavektori ei ole ominaisvektori.) (4p.)

2. Joukko \mathcal{M} koostuu muotoa $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ olevista reaalisisistä 2×2 -matriiseista,

$$\text{eli } \mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Osoita että jos $A, B \in \mathcal{M}$, niin myös $AB \in \mathcal{M}$. (2p.)
b) Osoita että jos $A, B \in \mathcal{M}$, niin $AB = BA$. (2p.)
c) Osoita että jos $A \in \mathcal{M}$, $A \neq 0$ (nollamatriisi), niin A on säännöllinen (eli sillä on käänteismatriisi A^{-1}) ja $A^{-1} \in \mathcal{M}$. (1p.+1p.)
3. a) Olkoon A ortogonaalinen $n \times n$ -matriisi, eli matriisi, jolla on käänteismatriisi A^{-1} , joka toteuttaa ehdon $A^{-1} = A^T$. Osoita että myös A :n käänteismatriisi A^{-1} on ortogonaalinen. (2p.)
b) Olkoot A ja B ortogonaaliset $n \times n$ -matriisit. Osoita että myös AB on ortogonaalinen. (2p.)
c) Olkoon C $m \times m$ -matriisi ja λ (eräs) sen ominaisarvo. Osoita että λ^2 on matriisin C^2 ominaisarvo ja että λ^3 on matriisin C^3 ominaisarvo. (1p.+1p.)

4. Määritä pienimmät positiiviset kokonaisluvut x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ja x_6 reaktiokaavassa



(tässä kaliumpermanganaatti ja mangaanisulfaatti reagoivat vedessä muodostaen mangaanidioksidia, kaliumsulfaattia ja rikkihappoa).

Kirjoita yhtälöt matriisimuodossa ja ratkaise käyttäen esimerkiksi Gaussin eliminaatiota. (6p.)

