MS-A0008 Matriisilaskenta, kevät 2017 Metsalo/Leinonen
Välikoe, 6.4.2017 klo 9-12

**Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja**

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 2 & -7 & 6 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Laske matriisin $A$ determinantti. (1p.)
b) $\mathbf{x}$ on eräs matriisin $A$ ominaisvektori. Määritä ominaisarvo, johon se liittyy. (1p.)
c) Laske matriisin $A$ muut ominaisarvot ja jokaiseen ominaisarvoon joku konkreettinen siihen liittyvä ominaisvektori. (Määritelmän mukaan nollavektori ei ole ominaisvektori.) (4p.)

2. Joukko $\mathcal{M}$ koostuu muotoa $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ olevista reaalisista $2 \times 2$-matriiseista,
eli $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbf{R} \right\}$.
a) Osoita että jos $A, B \in \mathcal{M}$, niin myös $AB \in \mathcal{M}$. (2p.)
b) Osoita että jos $A, B \in \mathcal{M}$, niin $AB = BA$. (2p.)
c) Osoita että jos $A \in \mathcal{M}$, $A \neq 0$ (nollamatriisi), niin $A$ on säännöllinen (eli sillä on käänteismatriisi $A^{-1}$) ja $A^{-1} \in \mathcal{M}$. (1p.+1p.)

3. a) Olkoon $A$ ortogonaalinen $n \times n$-matriisi, eli matriisi, jolla on käänteismatriisi $A^{-1}$, joka toteuttaa ehdon $A^{-1} = A^T$. Osoita että myös $A$:n käänteismatriisi $A^{-1}$ on ortogonaalinen. (2p.)
b) Olkoot $A$ ja $B$ ortogonaaliset $n \times n$-matriisit. Osoita että myös $AB$ on ortogonaalinen. (2p.)
c) Olkoon $C$ $m \times m$-matriisi ja $\lambda$ (eräs) sen ominaisarvo. Osoita että $\lambda^2$ on matriisin $C^2$ ominaisarvo ja että $\lambda^3$ on matriisin $C^3$ ominaisarvo. (1p.+1p.)

4. Määritä pienimmät positiiviset kokonaisluvut $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ ja $x_6$ reaktiokaavassa

$$x_1\mathbf{KMnO_4} + x_2\mathbf{MnSO_4} + x_3\mathbf{H_2O} \rightarrow x_4\mathbf{MnO_2} + x_5\mathbf{K_2SO_4} + x_6\mathbf{H_2SO_4}$$

(tässä kaliumpermanganaatti ja mangaanisulfaatti reagoivat vedessä muodostaen mangaanidioksidia, kaliumsulfaattia ja rikkihappoa).
Kirjoita yhtälöt matriisimuodossa ja ratkaise käyttäen esimerkiksi Gaussin eliminaatiota. (6p.)