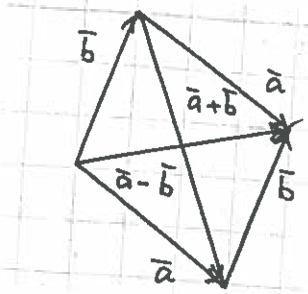
MS-A0008 Matriisilaskenta, kevät 2017 Metsalo
Tentti, 25.4.2017 klo 16:30-19:30

**Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja**




1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Osoita että $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$. (Tulosta sanotaan *suunnikaslauseeksi*, koska se sanoo, että diagonaalien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin sivujen pituuksien neliöiden summa suunnikkaassa. Pythagoraan lause saadaan tämän lauseen erikoistapauksena, kun suunnikas on suorakulmio.)

2. Teemu Teekkari sai muutama vuosi sitten toimeksiannon suunnitella kotikuntansa Keskustorin joulukuusen koristuksen. Hän teki hienon suunnitelman, missä käytettiin 23 kultatähteä, 28 hopeakäpyä ja 125 punaista palloa. Kirkonkylän Tiimarissa oli paraikaa menossa joulukoristeiden konkurssiloppuunmyynti. Koristeet oli pakattu keltaisiin paketteihin, joissa oli 1 tähti, 2 käpyä ja 7 palloa, sinisiin paketteihin, joissa oli 2 tähteä, 1 käpy ja 8 palloa sekä punaisiin paketteihin, joissa oli 2 tähteä, 3 käpyä ja 12 palloa.
Pystyikö Teemu koristelemaan kuusen Tiimarin paketeilla niin, että kaikki koristeet tulivat käytetyiksi? Kirjoita ongelma lineaarisena yhtälöryhmänä, selitä, mitä käytetyt symbolit tarkoittavat ja ratkaise yhtälöryhmä käyttäen Gaussin menetelmää.

3. a) Olkoon $A$ säännöllinen $n \times n$-matriisi, eli matriisi, jolla on käänteismatriisi $A^{-1}$, joka toteuttaa ehdot $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Osoita että silloin myös $A$:n transpoosi $A^T$ on säännöllinen osoittamalla että $(A^{-1})^T$ on sen käänteismatriisi, eli että $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Selitä mitä matriisioperaatioiden ominaisuuksia käytit todistuksessasi ja missä vaiheessa käytit niitä.
(Tästä seuraa että jos $A$ on myös symmetrinen (eli $A^T = A$), niin myös $A^{-1}$ on symmetrinen, koska $(A^{-1})^T = \{\text{a)-kohta}\} = (A^T)^{-1} = \{A \text{ symmetrinen}\} = A^{-1}$.)
b) Laske symmetrisen matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi.

4. Jos $M$ on reaalinen $m \times n$-matriisi, niin symmetrisen $m \times m$-matriisin $MM^T$ ja symmetrisen $n \times n$-matriisin $M^TM$ kaikki ominaisarvot ovat reaalisia ja ei-negatiivisia. Lisäksi matriiseilla $MM^T$ ja $M^TM$ on yhteiset positiiviset ominaisarvot $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$, missä $r \leq \min\{m, n\}$. Luvut $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ ovat matriisin $M$ *singulaariarvot*.
Laske matriisin $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ singulaariarvot ja anna ne pienenevässä järjestyksessä, niin että $\sigma_k \geq \sigma_{k+1}$.

5. a) Anna joku konkreettinen reaalinen $2 \times 2$-matriisi $A \neq 0$ (nollamatriisi) s.e. $A^2 = 0$. (Huomaa, ettei ole reaalisia eikä kompleksisia lukuja, joilla olisi vastaava ominaisuus.)
b) Anna joku konkreettinen reaalinen $2 \times 2$-matriisi $B$ s.e. $B^2 = -I$. (Huomaa, ettei ole reaalisia lukuja, joilla olisi vastaava ominaisuus, mutta että on kaksi kompleksilukua, $\pm i$, joilla on vastaava ominaisuus.)
c) Jos $m \times n$-matriisi $C$ on nollamatriisi, niin $C\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{C}^m$ jokaisella vektorilla $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$. Osoita että myös käänteinen tulos pätee, eli osoita että jos $C\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{C}^m$ jokaisella vektorilla $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$, niin $C$ on $m \times n$-nollamatriisi.

Till TF:s tentamens-arkiv.
Hälsn. Georg