

Kurssitentti ja yleinen tentti 5.4.2017 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen kurssille osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvona määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Origokeskisen R -säteisen pallon $B(R)$ lämpötila laskee keskipisteestä mitatun etäisyyden funktiona keskipisteen arvosta 100 pinnan arvoon 0 muodossa

$$T = T(r) = 100(1 - r^2/R^2), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Laske pallon keskilämpötila

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \iiint_{B(R)} T \, dV.$$

2. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, kun $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 - a) Osoita, ettei vektorikentällä \mathbf{F} ole skalaaripotentialia.
 - b) Laske vektorikentän \mathbf{F} viivaintegraali pitkin umpinaista käyrää C , joka
 - (i) kulkee ensin pisteestä $(1, 0, 0)$ pisteeseen $(1, 0, 2\pi)$ pitkin ruuviviivaa (Helix-käyrä) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
 - (ii) palaa sitten pisteestä $(1, 0, 2\pi)$ suoraan alas pisteeseen $(1, 0, 0)$.
3. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ suunnikas, jonka kärjet ovat pisteissä $(-2, -1)$, $(3, -1)$, $(6, 3)$ ja $(1, 3)$. Päättele symmetrian perusteella suunnikkaan D keskiön koordinaatit ja laske sen jälkeen Greenin kaavan avulla viivaintegraali

$$\oint_{\partial D} (3y^2 + 2xe^{y^2}) \, dx + 2x^2ye^{y^2} \, dy.$$

4. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vuo pinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (yksikköpallo) läpi, kun positiivinen suunta on ulospäin.
5. Olkoot $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia skalaarikenttiä.
 - a) Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että

$$\nabla \times (f\nabla g - g\nabla f) = \mathbf{0}.$$

- b) Olkoon lisäksi $\Delta f = \Delta g = 0$. Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että

$$\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = 0.$$

Käännä!

6. Olkoot $R > r$ vakioita. Torus on (auton sisärenkaan tai munkkirinkilän muotoinen) pinta, joka syntyy r -säteisen ympyrän keskipisteen kiertäessä R -säteisen ympyrän kehän; vrt. kuvio. Toruksella on parametrisointi

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

kun $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Osoita, että parametrisoinnin pinta-alan suurennessuhde on $r(R + r \cos u)$ ja että toruksen pinta-ala on muotoa $2\pi r \cdot 2\pi R$. (Erikoistapaus Pappuksen lauseesta)



Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccccc} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Eräitä kaavoja:

- $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$, $\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$, $a, b \in \mathbf{R}$
- $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\bar{x} = \frac{1}{A} \iint x dA$, $\bar{y} = \frac{1}{A} \iint y dA$
- $\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$
- Tällä kurssilla \mathbf{n} = yksikkönormaali.
- $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$
- $\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$
- (r, φ, θ) : $x = r \sin(\varphi) \cos(\theta)$, $y = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$, $z = r \cos(\varphi)$,
 $dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta$
- (ρ, θ, z) : $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, $z = z$, $dV = \rho d\rho d\theta dz$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$,
 $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitenttiin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.