Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Kurki
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3
MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 5.4.2017 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Origokeskisen R-säteisen pallon $B(R)$ lämpötila laskee keskipisteestä mitatun etäisyyden funktiona keskipisteen arvosta 100 pinnan arvoon 0 muodossa

$$T = T(r) = 100(1 - r^2/R^2), \; 0 \le r \le R.$$

Laske pallon keskilämpötila

¿?
$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_{B(R)} T \, dV.$$

2. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$, kun $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
a) Osoita, ettei vektorikentällä $\mathbf{F}$ ole skalaaripotentiaalia.
b) Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ viivaintegraali pitkin umpinaista käyrää C, joka
(i) kulkee ensin pisteestä $(1,0,0)$ pisteeseen $(1,0,2\pi)$ pitkin ruuviviivaa (Helix-käyrä) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$,
(ii) palaa sitten pisteestä $(1,0,2\pi)$ suoraan alas pisteeseen $(1,0,0)$.

3. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ suunnikas, jonka kärjet ovat pisteissä $(-2,-1)$, $(3,-1)$, $(6,3)$ ja $(1,3)$. Päättele symmetrian perusteella suunnikkaan D keskiön koordinaatit ja laske sen jälkeen Greenin kaavan avulla viivaintegraali

$$\oint_{\partial D} \left(3y^2 + 2xe^{y^2}\right) dx + 2x^2ye^{y^2} \, dy.$$

4. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vuo pinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (yksikköpallo) läpi, kun positiivinen suunta on ulospäin.

5. Olkoot $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia skalaarikenttiä.
a) Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että

$$\nabla \times (f\nabla g - g\nabla f) = \overline{0}.$$

b) Olkoon lisäksi $\Delta f = \Delta g = 0$. Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että

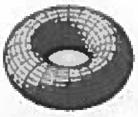
$$\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = 0.$$

Käännä!

6. Olkoot $R > r$ vakioita. Torus on (auton sisärenkaan tai munkkirinkilän muotoinen) pinta, joka syntyy r-säteisen ympyrän keskipisteen kiertäessä R-säteisen ympyrän kehän; vrt. kuvio. Toruksella on parametrisointi

$$\mathbf{r}(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),$$

kun $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Osoita, että parametrisoinnin pinta-alan suurennussuhde on $r(R + r\cos u)$ ja että toruksen pinta-ala on muotoa $2\pi r \cdot 2\pi R$. (Erikoistapaus Pappuksen lauseesta)



Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

α	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0

Eräitä kaavoja:

- $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$, $\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$, $a, b \in \mathbf{R}$
- $\nabla \times \nabla f = \overline{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\overline{x} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint x\,dA$, $\overline{y} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint y\,dA$
- $\displaystyle\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\displaystyle\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$
- $\displaystyle\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r, φ, θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- (ρ, θ, z): $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, $z = z$, $dV = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**