Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Gustafsson
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM)
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ELEC2)
MS-A0106 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ENG2)
MOOC Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Kurssitentti ja yleinen tentti 14.12.2017 klo 9.00–12.00.
Vastauspaperit palautetaan koodeittain eri kasoihin.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen II-periodin luentokurssille osallistunut voi siis halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää". Tämä koskee myös I-periodin 2017 TFM-kurssin opiskelijoita.

1. a) Laske sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{7^{k+1}}$ summa.

   b) Suppeneeko sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k^2+1}$?

   c) Millä muuttujan x arvoilla potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ suppenee?

2. a) Laske raja-arvo
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(3x)}{1-\cos x}.$$

   b) Selitä lyhyesti, millä yleisellä periaatteella funktion f Maclaurin-polynomi $P_n(x)$ muodostetaan, ja määritä $P_3(x)$ funktiolle $f(x) = x\cos(2x)$.
   Huom: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi pisteen $x_0 = 0$ suhteen.

3. a) Olkoon $f\colon A \to B$ funktio. Määrittele seuraavat käsitteet:
   (i) injektio.
   (i) surjektio.
   (ii) käänteisfunktio.
   b) Määritä funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x + e^x$, käänteisfunktion derivaatta kohdassa $x = 2$, toisin sanoen $(f^{-1})'(2)$.
   Varoitus: Käänteisfunktion lauseketta ei voi muodostaa alkeisfunktioiden avulla.

Käännä!

4. a) Laske osittaisintegrointia käyttämällä epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty xe^{-3x}\,dx.$$

b) Laske integraali

$$\int_1^8 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$$

sijoittamalla $t = 1 + 3x$.

5. a) Tarkastellaan keskimääräistä ilmanpainetta $p = p(h)$ Maan pinnalta mitatun etäisyyden $h \geq 0$ funktiona, kun muuttujan h yksikkönä on kilometri. Funktio $p(h)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $p' = -kp$, jossa k on positiivinen vakio. Mittausten perusteella ilmanpaine 17 kilometrin korkeudella on kymmenesosa Maan pinnan arvosta, toisin sanoen $p(17) = p(0)/10$. Määritä vakion k tarkka arvo.
b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2x/y$ alkuehdolla $y(0) = 4$.

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 4y' - 21y = 42x - 29$ yleinen ratkaisu.

Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja ja Taylor-/Maclaurin approksimaatioita:

$$\begin{aligned}
D\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\
\frac{1}{1-q} &= \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \\
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia III-periodin tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**