MS-A0107 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Heikkinen/Jakobsson

Kokeessa saa käyttää laskinta.

Tentti 14.12.2017

1. Muodosta geometrista sarjaa $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$, $|t| < 1$, hyödyntäen funktion
$$f(x) = \frac{x^2}{8+x^3}$$
Taylorin polynomi $T_{11}(x,0) = \sum_{k=0}^{11} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Laske myös derivaatat $f^{(8)}(0)$ ja $f^{(9)}(0)$.

2. Laske
$$\int \frac{x}{(x^2+4)(x+1)}\,dx.$$
Vihje: muodosta osamurtokehitelmä
$$\frac{x}{(x^2+4)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+1}.$$

3. Etsi differentiaaliyhtälön $y' = x^3 y^{-2}$ ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(2) = 2$.

4. a) Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ eräs ratkaisu yritteellä $y_0(x) = Ae^{3x}$.

   b) Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

   Muistutus: Homogeenisen DY:n $y'' + ay' + by = 0$ yleinen ratkaisu y_h määräytyy karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ juurien λ_1, λ_2 perusteella seuraavasti:

   - Jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$, niin $y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.
   - Jos $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, niin $y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$.
   - Jos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ja $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, missä $\beta \neq 0$, niin $y_h(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$.