Till TF:s tentamens-arkiv. Hälsn. Georg

Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

MS-A0109 Differential- och integralkalkyl 1

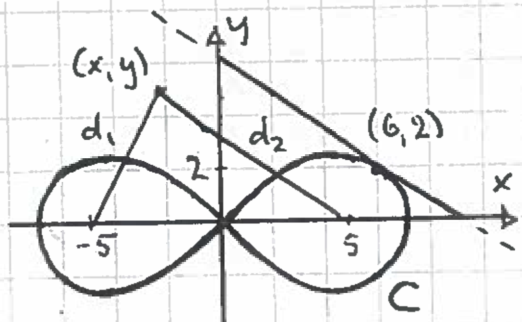
Tentamen 14.12.2017

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Denna tentamen räknas antingen som en deltentamen (varvid hemtals-, inlämnings- och Stack-poängen räknas tillgodo) eller som en sluttentamen (varvid dessa inte räknas tillgodo), beroende på vilket som ger ett högre vitsord.
Vid denna tentamen får varken räknare eller formelsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.
Observera, att olika uppgifter kan ge olika antal poäng.

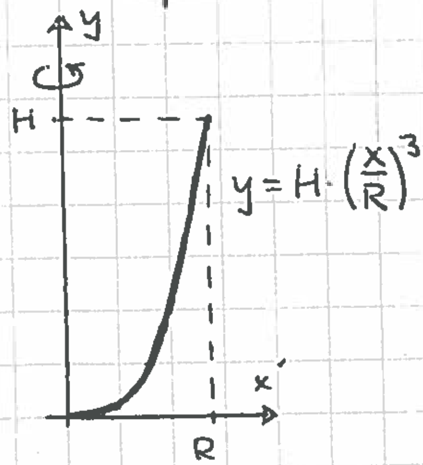
1. Avgör om talserien konvergerar eller divergerar (och som motivering räcker inte att nämna namnet på något konvergenskriterium, som kanske har, kanske saknar relevans i sammanhanget!). (3p.+3p.)
   a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$, b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k^k)}$.

2. a) Bestäm gränsvärdet $c = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$. (3p.)
   b) Funktionen $f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$, $x \neq 0$; $f(0) = c$ med c från föregående deluppgift är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}$, även i origo $x = 0$, eftersom dess gränsvärde är lika med dess funktionsvärde där. Beräkna $f'(0)$. (3p.)



3. Låt d_1 vara avståndet från punkten $(-5,0)$ till punkten (x,y) och d_2 avståndet från punkten $(5,0)$ till punkten (x,y). Kurvan C består av de punkter (x,y) sådana att $d_1 \cdot d_2 = 5^2 \Leftrightarrow d_1^2 \cdot d_2^2 = ((x+5)^2+y^2)\cdot((x-5)^2+y^2) = 625 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = 50(x^2-y^2)$. (Kurvan C kallas för en *lemniskata* och den är oändlighetstecknets förebild.) $(6,2) \in C$. Tangentlinjen till C i punkten $(6,2)$ begränsar tillsammans med koordinataxlarna en rätvinklig triangel. Beräkna arean hos denna triangel. (6p.)

4. Visa att $\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{t}{2}\cdot\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\cdot\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$. Redovisa mellanstegen! (3p.)



5. Svatta bestämde sig för att ge sin far en whisky-tumlare i julklapp. Hon designade den så att tumlarens profil gavs av kurvan $y = H\cdot(x/R)^3$, $x \in [0mm, R]$, roterad kring y-axeln, varvid den står stabilt (även om den lätt kan tumla omkull, om höjden H är mycket större än topp-radien R). Bestäm hur mycket whisky, som ryms i tumlaren, om den fylls till brädden. (3p.)

6. Svatta lät försilvra insidan av pappas whisky-tumlare för att den ädla dryckens kulör skulle komma till sin rätt. Bestäm arean hos whisky-tumlarens inneryta. (6p.)