

MS-A0109 Differential- och integralkalkyl 1

Tentamen 25.5.2018

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller formelsamlingar användas.

Välj fem uppgifter. Du kan även attackera alla uppgifterna, varvid de fem bästa beaktas.

1. Vi studerar numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med hjälp av Newtons metod.
 - a) Förklara hur man från tangentlinjen till funktionens graf får iterationsformeln $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, som hör till metoden.
 - b) Beräkna första iteratet x_1 till ekvationen $x^4 - 3 = 0$, då $x_0 = 1$.
2. a) För vilka värden på variabeln $x \in \mathbf{R}$ konvergerar potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} k(x-3)^k$?
b) Antag, att termerna a_k i serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ satisfierar $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{5}$ för alla k . Visa att serien konvergerar.
3. a) Bestäm Maclaurin-polynomet $P_3(x)$ till funktionen $f(x) = \sin(3x)$.
b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos x}$.
4. Beräkna integralerna $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2) dx$ och $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$.
Gott råd: I den senare integralen kan man i början göra substitutionen $x = t^2$.
5. Bestäm lösningen till differentialekvationen $y' = 6\sqrt{y}$, då $y(0) = 9$.
6. Bestäm lösningen till differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$, som satisfierar begynnelsevillkoren $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

Tilläggsinformation.

Några värden hos trigonometriska funktioner:

α	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0

Några Maclaurin-approximationer:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$
$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$