

Tentti 8.9.2016

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. a) Määritä pinnan  $z = 2x^2 - 3xy^2$  tangenttitaso pisteessä  $(2, 1, 2)$ .  
b) Määritä pinnan  $x^4 + 3x^2y + 2y^2 + z = 15$  normaalivektori pisteessä  $(1, 2, 0)$ .
2. Tarkastellaan (ohutta kuperaa) linssiä, jonka polttoväli on  $f$ . Olkoon  $x$  esineen etäisyys linssistä ja  $y$  esineen kuvan etäisyys linssistä. Tällöin pätee

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Sievennä funktion  $f = f(x, y)$  lauseke ja arvioi suhteellista virhettä  $|\Delta f|/f$  käyttämällä kaavaa

$$|\Delta f| \lesssim |f_x| \cdot |\Delta x| + |f_y| \cdot |\Delta y|.$$

Anna vastaus suhteellisten virheiden  $|\Delta x|/x$  ja  $|\Delta y|/y$  avulla lausuttuna.

3. Määritä funktion  $f(x, y, z) = 8x - 4y + 2z$  suurin ja pienin arvo pallopinnalla  $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ .
4. Piirrä kuvio tasojoukosta  $D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq x + 2\}$ . Laske sen pinta-ala  $A$  ja keskiön  $y$ -koordinaatti

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y \, dA.$$

5. a) Satunnaismuuttujan  $X$  arvo on yksikkökiekosta

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

satunnaisesti valitun (ts. tiheysfunktio = vakio =  $1/A$ ) pisteen etäisyys origosta. Laske sen odotusarvo

$$EX = \frac{1}{A} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA.$$

- b) Laske kappaleen

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 8xy\}$$

tilavuus.