Aalto-yliopisto

MS-A0201

Tentti, 5.4.2018 klo 9.00-12.00

Till Tf:s tentamens-arkiv. Hälsn. Georg

Ratkaise kaikki kuusi tehtävää.
Ei laskimia eikä taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: Selitä lyhyesti seuraavat käsitteet:

a) suunnattu gradientti

b) Newtonin menetelmä yhtälöryhmän ratkaisemiseen

c) pienimmän neliösumman menetelmä

d) satulapiste

e) Jacobin determinantti

f) kokonaisderivaatta

Tehtävä 2: Laske spiraalinpätkän

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t, \\ y(t) = e^{-t}\sin t, \end{cases}$$

kaarenpituus, jossa parametri $t \in [0, \tau]$. Mitä tapahtuu kun $\tau \to \infty$?

Tehtävä 3: Etsi kaikkien niiden pisteiden (x, y) muodostama joukko, joissa pinnan $z = x^2 - y^2$ normaali on $\pi/4$ rad kulmassa z-akselia vastaan.

Tehtävä 4: a) Laske funktion

$$f(x, y) \quad = \quad x\sin y - y\cos x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

toiseen asteen Taylorin kehitelmä $T(x, y)$ pisteessä $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. (2 p.)

b) Etsi ja luokittele saamasi funktion $T(x, y)$ kriittiset pisteet tasossa $\mathbb{R}^2$. (4 p.)

Käännä!

Tehtävä 5: Määritä funktion

$$f(x,y,z) = x + 2y + \frac{z^2}{2}$$

suurin ja pienin arvo pallolla $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ käyttämällä Lagrangen menetelmää.

Tehtävä 6: Tarkastellaan $2a$-säteistä ympyrälevyä D, jonka keskelle on porattu a-säteinen reikä, $a > 0$. Levyn paksuutta merkittäköön $h > 0$, ja oletettakoon materiaalin tiheyden olevan vakio ρ_0. Pyöritetään levyä (kenties jonkinlaisten massattomiksi ajateltujen puolien varassa) keskipisteensä ympäri, jolloin sen hitausmomentiksi saadaan

$$I_z = \iiint_D \rho_0(x^2 + y^2)\, dV,$$

missä integraalissa pyörimisakseli on ajateltu z-akseliksi.
Etsi arvo geometriselle vakiolle k, jolla hitausmomentti saadaan esitettyä muodossa $I_z = kma^2$, missä m on levyn kokonaismassa.

Kaavakokoelma:

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

$$P_k(x,y) = \sum_{m=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \frac{1}{(m-n)!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-n} f(a,b)(x-a)^n (y-b)^{m-n}.$$

$$\begin{aligned} df &:= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\ &= f_1(x_1,\ldots,x_n)dx_1 + \ldots + f_n(x_1,\ldots,x_n)dx_n. \end{aligned}$$

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_y(P_0) \\ G_y(P_0) \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Hess} f(P) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}.$$
