MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2, syksy 2019
Tentti, 12.12.2019

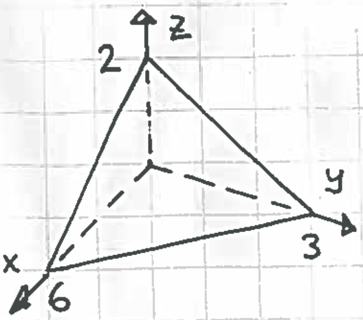
Metsalo

Tentissä ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja

Tehtävä 1. Osoita että funktio $f(x,y) = x \cdot \cos(x-y) + y \cdot e^{x-y}$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ tietyllä vakion c arvolla sekä määritä tämä arvo.

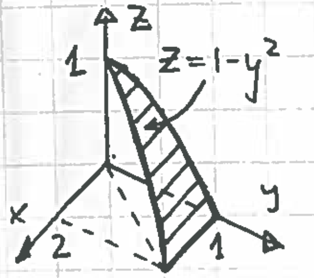
Tehtävä 2. Karteesisilla koordinaateilla x, y ja napakoordinaateille r, θ pätee $x = r \cdot \cos\theta, y = r \cdot \sin\theta \Rightarrow \tan\theta = y/x$ (kun $x \neq 0$) ja $r^2 = x^2 + y^2$. Osoita että $\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$. (Tutusta kaavasta $\frac{d}{dt}(\tan(t)) = 1 + \tan^2(t)$ saattaa olla hyötyä.)

Tehtävä 3. Määritä suurin tilavuus särmiölle, joka mahtuu oikealla olevaan tetraederiin, jonka kärjet ovat $(0,0,0)$, $(6,0,0)$, $(0,3,0)$ ja $(0,0,2)$ niin että kolme sen kuudesta tahkosta ovat koordinaattitasoissa.



Tehtävä 4. Olkoon W homogeeninen kappale, jonka tilavuus on $V = \iiint_W dV$. Sen keskiön z-koordinaatti on $\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_W z \cdot dV$ (ja keskiön x- ja y-koordinaatti saadaan vastaavasti).
Puolipallon $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ tilavuus on $V = \frac{2\pi R^3}{3}$. Symmetrian takia sen keskiö on z-akselilla.
Laske keskiön z-koordinaatti $\bar{z}$
a) lieriökoordinaattien avulla, b) pallokoordinaattien avulla.

Tehtävä 5. Laske sen parabolisen lieriön $z = 1 - y^2$ osan pinta-ala, joka on 1. oktantissa $x, y, z \geq 0$ ja jonka xy-taso, yz-taso ja taso $x = 2y$ rajoittavat. (Vihje: Pinnan pinta-ala ei voi olla pienempi kuin sen projektion pinta-ala jollekin (koordinaatti-)tasolle.)



Till TF:s
tentamens-
arkiv.
Hälsn.
Georg