



**Aalto-yliopisto**

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu  
Matematiikan ja systeemanalyysin laitos

Tentti/Loppukokeen uusinta 10.5.2017

Malinen

MS-A0203 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (ELEC1)

Loppukokeen uusinta: 1, 3, 4, 5, 7

Tentti: 2, 3, 4, 6, 7

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Tarkastellaan spiraalia  $x = e^{-t} \cos(t)$ ,  $y = e^{-t} \sin(t)$ , kun  $t \in \mathbb{R}$ .
  - a) Määritä parametrin arvoa  $t = 0$  vastaava käyrän tangenttivektori.
  - b) Laske spiraalin kierroksen  $0 \leq t \leq 2\pi$  kaarenpituus.
2. Määritä pinnan  $x^3 + 3x^2y + y^2 + 2 \cos z = 13$  jokin normaalivektori pisteessä  $(1, 2, 0)$ .
3. Tarkastellaan funktiota  $f$ , jolle

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{xy},$$

kun  $x > 0$  ja  $y > 0$ . Määritä funktion  $f$  raja-arvot positiivisilla koordinaattiakseleilla eli pisteissä  $(x_0, 0)$  ja  $(0, y_0)$ , kun  $x_0 > 0$  ja  $y_0 > 0$ .

**Vihje:** sini-funktion polynomiapproksimaatiosta/L'Hospitalin säännöstä voi olla hyötyä.

**KÄÄNNÄ!**

4. Määritä funktion  $f(x, y, z) = 2x - 4y + 8z$  suurin ja pienin arvo pallopinnalla  $x^2 + y^2 + z^2 = 21$  Lagrangen kertojien menetelmällä.
5. Laske yksikköympyrälevyn puolikkaan painopisteen se koordinaatti, joka ei ole ilmeinen symmetrian perusteella. Toisin sanoen: etsi painopisteen y-koordinaatti käyrän  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , ja x-akselin rajoittamalle alueelle.
- Vihje:** Integroinnissa napakoordinaatit auttavat.
6. Laske funktion  $g(x, y) = \sin(x + y)$  tasointegraali yli kolmion  $T$ , jonka kärjet ovat pisteissä  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  ja  $(\pi, \pi)$ .
7. Ympyränmuotoisen  $R$ -säteisen levyn  $D$  lämpötila  $T = T(r)$  laskee keskipisteestä mitatun etäisyyden  $r$  funktiona keskipisteen arvosta 100 lineaarisesti reunan arvoon 0. Muodosta lämpötilan lauseke  $T(r)$  ja laske levyn keskilämpötila

$$\bar{T} = \frac{1}{A} \iint_D T \, dA.$$

**KÄÄNNÄ!**