

Tentti 10.5.2017

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. a) Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio. Selitä lyhyesti, kuinka sen kuvapinnan $z = f(x, y)$ tangenttitaso voidaan muodostaa.
b) Määritä pinnan $z = 2x^2 - 3y^3$ normaalivektori pisteessä $(1, 1, -1)$.
2. Tarkastellaan (ohutta kuperaa) linssiä, jonka polttoväli on f . Olkoon x esineen etäisyys linssistä ja y esineen kuvan etäisyys linssistä. Tällöin pätee

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Sievennä funktion $f = f(x, y)$ lauseke ja arvioi suhteellista virhettä $|\Delta f|/f$ käyttämällä kaavaa

$$|\Delta f| \lesssim |f_x| \cdot |\Delta x| + |f_y| \cdot |\Delta y|.$$

Anna vastaus suhteellisten virheiden $|\Delta x|/x$ ja $|\Delta y|/y$ avulla lausuttuna.

3. Määritä funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo ellipsillä $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$.
4. Piirrä kuvio tasojoukosta $D = \{(x, y) \mid -x^2 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$. Laske sen pinta-ala A ja keskiön x -koordinaatti

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x \, dA.$$

5. Pyöreän R -säteisen levyn D lämpötila $T = T(r)$ laskee keskipisteestä mitatun etäisyyden r funktiona keskipisteen arvosta 100 reunan arvoon 0 muodossa $T(r) = 100(1 - r^2/R^2)$. Laske levyn keskilämpötila

$$\bar{T} = \frac{1}{A} \iint_D T \, dA.$$