



Aalto-yliopisto

MS-A0301

Loppukoe 7.4.2016 klo 9-12

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Kaavakokoelma koepaperin kääntöpuolella.

Tehtävä 1: Tarkastellaan vektorikenttää $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

- Mitkä ovat sen kenttäviivat? (1 p.)
- Laske kentän $\mathbf{F}(x, y)$ viivaintegraali pisteestä $(-5, -3)$ pisteeseen $(0, 2)$ pitkin
 - suoraa,
 - paraabelin $x = 4 - y^2$ kaarta.
 (4 p.)
- Onko kenttä \mathbf{F} konservatiivinen? Perustele. (1 p.)

Tehtävä 2: Oletetaan, että Maa on pallo, jonka säde on R , ja että etäisyydet mitataan pitkin Maan pintaa, eli isoympyröitä pitkin. Laske pohjoisen pallonpuoliskon pisteiden keskimääräinen etäisyys pohjoisnavasta. (6 p.)

Tehtävä 3: Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$.

- Laske kentän \mathbf{F} divergenssi ja roottori. Mitä nämä kertovat? (2 p.)
- Laske vektorikentän \mathbf{F} vuo ulos kappaleesta, jota rajaavat pinnat $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$, $z = 4$ ja $y = 0$ ja jossa $y \leq 0$. (4 p.)

Tehtävä 4: Tarkista, että Stokesin lause

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pitää paikkansa, kun tarkasteltava vektorikenttä on $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ja pinta on $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$. (6 p.)

Kaavakokoelma:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\ \nabla \cdot (f\mathbf{F}) &= (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}) \\ \nabla \times (f\mathbf{F}) &= (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}\end{aligned}$$

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint_{\partial D} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \mathbf{N} dS$$

$$\iiint_D f(\nabla \cdot \mathbf{F}) dV + \iiint_D \nabla f \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial D} f\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

$$\int_c f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt.$$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt$$

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{n}(u, v)| du dv$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(r, \theta, z): x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z = z$$

$$(r, \varphi, \theta): x = r \sin(\varphi) \cos(\theta), y = r \sin(\varphi) \sin(\theta), z = r \cos(\varphi)$$