Aalto-yliopisto

# MS-A0301 (TFM) / MS-A0303
# Tentti 25.4.2017 klo 16.30–19.30

Valitse **viisi (5)** tehtävää. Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja. Kaavakokoelma koepaperin kääntöpuolella.

**Tehtävä 1:** Puolikartio $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ jakaa origokeskiset pallot kahteen osaan. Laske näiden osien tilavuuksien suhde.

**Tehtävä 2:** Tarkastellaan tason vektorikenttää $\mathbf{F}(x, y) = (y + 2x)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

a) Hahmottele vektorikentän kuva. (1 p.)

b) Onko vektorikenttä lähteetön? Entä pyörteetön? (1 p.)

c) Onko vektorikenttä konservatiivinen? Jos on, etsi sen skalaaripotentiaali. (2 p.)

d) Mikä on kentän viivaintegraali pisteitä $(1, 0)$ ja $(1, 2)$ yhdistävän, origon kautta kulkevan ympyränkaaren yli? (2 p.)

**Tehtävä 3:** Eräs pinta on parametrisoitu muodossa

$$x = uv, \quad y = u + v, \quad z = u - v, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Määritä parametrialuetta $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 6\}$ vastaavan pinnan osan pinta-ala. (4 p.)

b) Määritä parametrialueen janaa $v = u$, $u \in [0, 1]$, vastaavan käyrän kaarenpituus. (2 p.)

**Tehtävä 4:** Tetraedrin muotoista kappaletta $D \subset \mathbb{R}^3$ rajoittavat tasot $z = 0$, $x = 2y$, $x = -y$ ja $3y + z = 1$. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5xyz + e^{yz})\mathbf{i} + (x^2 + y^2 z)\mathbf{j} + (y^2 - 2yz^2)\mathbf{k}$$

vuo $D$:n reunapinnan $\partial D$ läpi $D$:stä ulospäin.

**Tehtävä 5:** Muotoile ja todista Greenin lause (eli Stokesin lause tasossa) tapauksessa, jossa $D$ on neliö $[0, 1] \times [0, 1]$.

**Käännä!**

**Tehtävä 6:** Sähkövirran tiheys $\mathbf{J}$ ja magneettikentän voimakkuus $\mathbf{H}$ olkoot sylinterikoordinaateissa $(r,\theta,z)$ muotoa $\mathbf{J} = J(r)\mathbf{e}_z$ ja $\mathbf{H} = H(r)\mathbf{e}_\theta$. Johda Maxwellin yhtälön $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ sekä Stokesin lauseen avulla $H$:n ja $J$:n välille yhteys

$$H(r) = \frac{1}{r}\int_0^r J(\rho)\rho\, d\rho.$$

**Kaavakokoelma:**

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\
\nabla\cdot(f\mathbf{F}) &= \nabla f\cdot\mathbf{F} + f(\nabla\cdot\mathbf{F}) \\
\nabla\times(f\mathbf{F}) &= \nabla f\times\mathbf{F} + f(\nabla\times\mathbf{F}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) \\
\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F}) - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} \\
\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) &= \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}
\end{aligned}$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\mathbf{e}_w$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\mathbf{e}_u & h_v\mathbf{e}_v & h_w\mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha)), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$$

$$(r,\theta,z): \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$(r,\phi,\theta): \quad x = r\sin\phi\cos\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\phi$$