

Tentti 29.5.2019

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitenttin uusinta: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Luentokurssille IV/2019 osallistuneet voivat valita yleisen tentin tai kurssitenttin uusinnan. Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”. Jos sinulla on laskaripisteitä kurssilta IV/2019, niin kirjoita kohtaan Lisätietoja ”+ laskaripisteet”.

1. Määritä R -säteisen puolipallon

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

massa

$$m = \iiint_D \rho dV,$$

kun sen tiheys on muotoa $\rho(x, y, z) = c(R + z)$ ja $c > 0$ on vakio.

2. Avaruuskäyrällä C on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 3t^2, 3t^3), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

jolloin käyrä kulkee origosta pisteeseen $(2, 3, 3)$.

a) Laske käyrän C kaarenpituus.

b) Laske viivaintegraali

$$\int_C (x + 3z) ds.$$

Vihje: Lausekkeita voi sieventää kaavan $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avulla.

3. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

vuon kappaleen

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$$

reunan ∂D läpi, kun positiivinen suunta on kappaleesta ulospäin. Voit käyttää joko Gaussin lausetta tai muita menetelmiä.

Käännä!

4. Olkoot f ja g kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia 3-ulotteisia skalaarikenttiä.
- Osoita, että $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.
 - Perustele nabra-kaava $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$.

5. Laske molemmat Stokesin lauseessa esiintyvät integraalit, kun

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + 2x \mathbf{j} + (y + z) \mathbf{k}$$

ja pintana P on puolipallo

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Millä tavalla pinnan P yksikkönormaali \mathbf{n} ja sen reunakäyrän ∂P positiivinen suunta täytyy valita, jotta Stokesin kaava on voimassa?

6. Tarkastellaan tasoa $z = ax + by$ parametrisoituna pintana $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, au + bv)$ yksikköneliössä $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$. Osoita, että vastaavan tason osan pinta-ala on muotoa $A = 1/\cos \varphi$, kun tason kaltevuuskulma φ määräytyy sen yksikköylännormaalin \mathbf{n} avulla yhtälöstä $\cos \varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$.

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

- $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}, \nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}, a, b \in \mathbb{R}$
- $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}, \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}), \nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\bar{x} = \frac{1}{A} \iint x dA, \bar{y} = \frac{1}{A} \iint y dA$
- $\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$
- Tällä kurssilla \mathbf{n} = yksikkönormaali.
- $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$
- $\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$
- $(r, \varphi, \theta): x = r \sin(\varphi) \cos(\theta), y = r \sin(\varphi) \sin(\theta), z = r \cos(\varphi), dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta$
- $(r_\perp, \theta, z): x = r_\perp \cos(\theta), y = r_\perp \sin(\theta), z = z, dV = r_\perp dr_\perp d\theta dz$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x).$