Aalto-yliopisto

MS-A0303

Loppukoe 7.4.2016 klo 9-12

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Kaavakokoelma koepaperin kääntöpuolella.

Tehtävä 1: Tarkastellaan vektorikenttää $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

a) Mitkä ovat sen kenttäviivat? (1 p.)

b) Laske kentän $\mathbf{F}(x, y)$ viivaintegraali pisteestä $(-5, -3)$ pisteeseen $(0, 2)$ pitkin

i) suoraa,

ii) paraabelin $x = 4 - y^2$ kaarta.

(4 p.)

c) Onko kenttä $\mathbf{F}$ konservatiivinen? Perustele. (1 p.)

Tehtävä 2: Oletetaan, että Maa on pallo, jonka säde on R, ja että etäisyydet mitataan pitkin Maan pintaa, eli isoympyröitä pitkin. Laske pohjoisen pallonpuoliskon pisteiden keskimääräinen etäisyys pohjoisnavasta. (6 p.)

Tehtävä 3: Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$.

a) Laske kentän $\mathbf{F}$ divergenssi ja roottori. Mitä nämä kertovat? (2 p.)

b) Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ vuo ulos kappaleesta, jota rajaavat pinnat $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$, $z = 4$ ja $y = 0$ ja jossa $y \leq 0$. (4 p.)

Tehtävä 4: Tarkista, että Stokesin lause

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pitää paikkansa, kun tarkasteltava vektorikenttä on $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ja pinta on $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$. (6 p.)

Kaavakokoelma:

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\
\nabla\cdot(f\mathbf{F}) &= (\nabla f)\cdot\mathbf{F} + f(\nabla\cdot\mathbf{F}) \\
\nabla\times(f\mathbf{F}) &= (\nabla f)\times\mathbf{F} + f(\nabla\times\mathbf{F}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) \\
\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F}) - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}
\end{aligned}
$$

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_{\partial D} (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\mathbf{N}\,dS$$

$$\iiint_D f(\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV + \iiint_D \nabla f\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} f\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\mathbf{e}_w$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\mathbf{e}_u & h_v\mathbf{e}_v & h_w\mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

$$\int_c f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| dt.$$

$$\int_c \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt$$

$$\iint_S f\ dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|\ du\ dv$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dS$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(r,θ,z): $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $z = z$

(r,φ,θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$