Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3
MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Tentti 29.5.2019

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentin uusinta: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Luentokurssille IV/2019 osallistuneet voivat valita yleisen tentin tai kurssitentin uusinnan. Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää". **Jos sinulla on laskaripisteitä kurssilta IV/2019, niin kirjoita kohtaan Lisätietoja "+ laskaripisteet".**

1. Määritä R-säteisen puolipallon

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$$

massa

$$m = \iiint_D \varrho \, dV,$$

kun sen tiheys on muotoa $\varrho(x, y, z) = c(R + z)$ ja $c > 0$ on vakio.

2. Avaruuskäyrällä C on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 3t^2, 3t^3),\ 0 \leq t \leq 1,$$

jolloin käyrä kulkee origosta pisteeseen $(2, 3, 3)$.
a) Laske käyrän C kaarenpituus.
b) Laske viivaintegraali

$$\int_C (x + 3z) \, ds.$$

Vihje: Lausekkeita voi sieventää kaavan $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avulla.

3. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

vuo kappaleen

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$$

reunan ∂D läpi, kun positiivinen suunta on kappaleesta ulospäin. Voit käyttää joko Gaussin lausetta tai muita menetelmiä.

Käännä!

4. Olkoot f ja g kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia 3-ulotteisia skalaarikenttiä.
   a) Osoita, että $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.
   b) Perustele nabla-kaava $\nabla \times (\nabla f) = \overline{0}$.

5. Laske molemmat Stokesin lauseessa esiintyvät integraalit, kun

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} + (y + z)\,\mathbf{k}$$

ja pintana P on puolipallo

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Millä tavalla pinnan P yksikkönormaali $\mathbf{n}$ ja sen reunakäyrän ∂P positiivinen suunta täytyy valita, jotta Stokesin kaava on voimassa?

6. Tarkastellaan tasoa $z = ax + by$ parametrisoituna pintana $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, au + bv)$ yksikköneliössä $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Osoita, että vastaavan tason osan pinta-ala on muotoa $A = 1/\cos\varphi$, kun tason kaltevuuskulma φ määräytyy sen yksikköylänormaalin $\mathbf{n}$ avulla yhtälöstä $\cos\varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

- $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$, $\nabla \times (a\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$, $a, b \in \mathbf{R}$
- $\nabla \times (\nabla f) = \overline{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\overline{x} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint x\,dA$, $\overline{y} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint y\,dA$
- $\displaystyle\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\displaystyle\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$
- $\displaystyle\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r, φ, θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- $(r_\perp, \theta, z)$: $x = r_\perp\cos(\theta)$, $y = r_\perp\sin(\theta)$, $z = z$, $dV = r_\perp\,d\rho\,d\theta\,dz$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$.