Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Metsalo

MS-A0309 Differential- och integralkalkyl 3

Tentamen 5.4.2018

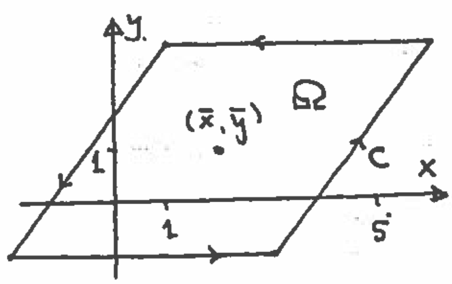
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Ange klart och tydligt om ni skriver **deltentamen** eller **sluttentamen**!
Deltentamen består av fyra valfria uppgifter av nedanstående fem uppgifter och då räknas även poängen från hemtalen och inlämningsuppgifterna med.
Sluttentamen består av alla fem uppgifterna och då räknas hemtal och inlämningsuppgifter inte längre tillgodo.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
På förekommen anledning varnas för oavsiktliga tryckfel i texten.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. a) Låt $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ vara vektorfält av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$ och $a, b \in \mathbf{R}$ vara konstanter. Visa att $div(a\cdot\mathbf{F}+b\cdot\mathbf{G}) = a\cdot div(\mathbf{F})+b\cdot div(\mathbf{G})$, dvs. att $\nabla\bullet(a\cdot\mathbf{F}+b\cdot\mathbf{G}) = a\cdot\nabla\bullet\mathbf{F}+b\cdot\nabla\bullet\mathbf{G}$. Redovisa mellanstegen.
   b) Låt Φ vara ett skalärfält och $\mathbf{H}$ ett vektorfält av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$. Visa att $rot(\Phi\cdot\mathbf{H}) = grad(\Phi)\times\mathbf{H}+\Phi\cdot rot(\mathbf{H})$, dvs att $\nabla\times(\Phi\cdot\mathbf{H}) = (\nabla\Phi)\times\mathbf{H}+\Phi\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$. Redovisa åter mellanstegen.

2. Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ är definierat i hela $\mathbf{R}^3$ förutom längs z-axeln.
   a) Visa att $div(\mathbf{F}) = \nabla\bullet\mathbf{F} \equiv 0$ i $\mathbf{F}$:s definitionsmängd.
   b) Visa att $rot(\mathbf{F}) = \nabla\times\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ i $\mathbf{F}$:s definitionsmängd.
   c) Beräkna $\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, där C är den slutna kurvan som går från $(1,0,0)$ till $(1,0,2\pi)$ längs helixen (skruvkurvan) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ och därefter tillbaka till $(1,0,0)$ rätlinjigt.



3. Låt Ω vara romben med hörnpunkterna $(-2,-1)$, $(3,-1)$, $(6,3)$ och $(1,3)$ ovan. Dess area är naturligtvis 20 och dess tyngdpunkt $(\bar{x},\bar{y}) = (2,1)$. Låt C vara Ω:s randkurva, orienterad moturs. Beräkna $\oint_C((3y^2+2xe^{(y^2)})dx + (2x^2ye^{(y^2)})dy)$ mha. Greens sats.

4. Beräkna flödet av vektorfältet $x\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ ut genom enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$.

5. Ytan S är den delen av sadelytan $z = f(x,y) = (x^2-y^2)/R$, som finns innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=R^2$ med radien R (enhet m). I punkten $(x,y,z)\in S$ har ytan area-densiteten $\delta(x,y,z) = \delta_0\cdot(1+z/R)$, så $\delta_{max} = \delta(\pm R, 0m, R) = 2\delta_0$ (enhet kg/m^2) och $\delta_{min} = \delta(0m, \pm R, -R) = 0kg/m^2$. Beräkna ytans massa $\iint_S \delta\cdot dS$.

På baksidan finns en del formler och integralsatser.

Nyttiga (?) formler:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1, \cos^2\phi = (1+\cos(2\phi))/2, \sin^2\phi = (1-\cos(2\phi))/2$.
$\sin(2t) = 2\sin t\cos t, \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$.

Integralsatser:

1. $\int_{t_0}^{t_1} H'(t)dt = H(t_1) - H(t_0)$
2. $\int_C (\nabla\Phi) \bullet d\mathbf{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$, där kurvan C går från punkten P_0 till punkten P_1.
3. $\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (Greens sats i planet)
4. $\iint_R (\nabla \bullet \mathbf{F})dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}ds$ (Greens sats i planet)
5. $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \widehat{\mathbf{N}}dS = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (Stokes' sats)
6. $\iiint_D (\nabla \bullet \mathbf{F})dV = \iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}dS$ (Gauss' sats)
7. $\iint_S (\widehat{\mathbf{N}}dS \times \nabla)(\ldots) = \oint_C d\mathbf{r}(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\mathbf{F}$ eller $\times\mathbf{F}$. (Stokes' universalsats)
8. $\iiint_D dV \cdot \nabla(\ldots) = \iint_S \widehat{\mathbf{N}}dS(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\mathbf{F}$ eller $\times\mathbf{F}$. (Gauss' universalsats)