Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

MS-A0309 Differential- och integralkalkyl 3

Tentamen 29.5.2019

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. Bestäm massan $m = \iiint_D \delta(x,y,z)dV$ hos halvklotet
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$,
om kroppens densitet ges av $\delta(x,y,z) = c(R+z)$, där $c > 0$ är en konstant.

2. Rymdkurvan C ges på parameterform av $\mathbf{r}(t) = (2t, 3t^2, 3t^3)$, $0 \leq t \leq 1$, så kurvan går från origo till punkten $(2,3,3)$.
a) Beräkna längden hos kurvan C.
b) Beräkna kurvintegralen $\int_C (x+3z)ds$.
Gott råd: Formeln $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ kan vara till en viss hjälp.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ut genom begränsningsytan ∂D till området $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq 1 - (x^2+y^2)\}$.
Du kan använda antingen Gauss' sats eller någon annan metod.

4. Låt f och g bägge vara två gånger kontinuerligt deriverbara skalärfält i $\mathbb{R}^3$.
a) Visa att $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.
b) Motivera formeln $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

5. Beräkna bägge integralerna, som förekommer i Stokes' sats, då $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}$ och ytan S är halvsfären $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$.
Hur måste riktningen hos enhetsnormalen $\mathbf{N}$ till ytan S och positiva riktningen hos ytans randkurva ∂S väljas för att Stokes' sats skall gälla?

6. Vi studerar planet $z = ax + by$, parametriserad som ytan $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, au + bv)$, i enhetskvadraten $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Visa att arean hos denna del av planet är på formen $1/\cos\phi$, då planets lutningsvinkel ϕ fås ur dess uppåtriktade enhetsnormal $\mathbf{N}$ med hjälp av ekvationen $\cos\phi = \mathbf{N} \bullet \mathbf{k}$.

På baksidan finns en del integralsatser och trigonometriska funktioners värden.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, $\cos^2\phi = (1+\cos(2\phi))/2$, $\sin^2\phi = (1-\cos(2\phi))/2$.
$\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$, $\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 1 - 2\sin^2\phi$.
$(\rho,\phi,\theta) : x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta),\ y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta),\ z = \rho\cos(\phi),\ dV = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\phi d\theta.$
$(r,\theta,z) : x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ z = z,\ dV = r dr d\theta dz.$

Några värden på trigonometriska funktioner:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Integralsatser:

1. $\int_{t_0}^{t_1} H'(t)dt = H(t_1) - H(t_0)$
2. $\int_C (\nabla\Phi) \bullet d\mathbf{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$, där kurvan C går från punkten P_0 till punkten P_1.
3. $\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (Greens sats i planet)
4. $\iint_R (\nabla \bullet \mathbf{F}) dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}} ds$ (Greens sats i planet)
5. $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \widehat{\mathbf{N}} dS = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (Stokes' sats)
6. $\iiint_D (\nabla \bullet \mathbf{F}) dV = \iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}} dS$ (Gauss' sats)
7. $\iint_S (\widehat{\mathbf{N}} dS \times \nabla)(\ldots) = \oint_C d\mathbf{r}(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\mathbf{F}$ eller $\times\mathbf{F}$.
   (Stokes' universalsats)
8. $\iiint_D dV \cdot \nabla(\ldots) = \iint_S \widehat{\mathbf{N}} dS(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\mathbf{F}$ eller $\times\mathbf{F}$.
   (Gauss' universalsats)