

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet
Tentti 9.9.2016

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

1. Osoita induktion avulla, että

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + (2n + 3) = \sum_{j=0}^n (2j + 3) = n^2 + 4n + 3, \quad n \geq 0.$$

2. Opiskelija T sai tehtäväkseen osoittaa, että väitteet A , B , C ja D ovat ekvivalentteja (eli $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ kun \mathcal{X} ja $\mathcal{Y} \in \{A, B, C, D\}$). Hän todisti, että $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$, $\text{NOT } A \rightarrow \text{NOT } D$ ja $B \rightarrow C$ ovat tosia. Selitä miksi tämä ei riitä todistamaan että väitteet A , B , C ja D ovat ekvivalentteja ja vaihda jokin T :n todistamista implikaatioista toiseen, joka on sellainen, että jos se todistettaisiin niin alkuperäinen tehtävä tulisi ratkaistuksi.

Vihje: Piirrä suunnattu verkko siten että solusta \mathcal{X} on kaari soluun \mathcal{Y} jos T on todistanut, että $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ on tosi. Onko relaatio \rightarrow transitiivinen?

3. Yhdistyksen 40 jäsenen joukosta on valittava hallitus, johon kuuluu 6 jäsentä joista valitaan puheenjohtaja, varapuheenjohtaja ja sihteeri siten, että sama henkilö tulee valituksi korkeintaan yhteen toimeen. Monellako tavalla tämä on tehtävissä? Vastauksessasi saa numeroiden lisäksi olla potensseja, \cdot , $+$, $!$, $(,)$ ja $/$ mutta ei esimerkiksi binomikertoimia.

4. Jos $[G, \bullet]$ on ryhmä ja X on jokin joukko niin ryhmän vasen toiminta joukossa X on funktio ψ ryhmästä $[G, \bullet]$ joukon X kaikkien permutaatioiden ryhmään siten, että $\psi(a \bullet b)(x) = \psi(a)(\psi(b)(x))$. Osoita, että jos määritellään $\psi(a)(x) = a \bullet x \bullet a^{-1}$ niin ψ on ryhmän $[G, \bullet]$ vasen toiminta joukossa G .

5. Määritä seuraavan verkon kromaattinen luku eli pienin lukumäärä värejä, joilla verkon solmut voidaan värittää siten, että naapurit tulevat väritetyiksi eri väreillä. Muuttuuko kromaattinen luku jos yksi kaari poistetaan verkosta? Perustele!

